This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

SCIENCE CENTER LIBRARY

Math 1808.79

BOUGHT WITH

THE BEQUEST OF

HORACE APPLETON HAVEN,

OF PORTSMOUTH, N. H.

(Class of 1842.)

24 May, 1884.

Kurze Anleitung

zum Rechnen mit den

(Hamilton'schen) Quaternionen

von

Dr. **J. Odstrčil,**
Gymnasialprofessor in Teschen.

Mit 32 in den Text eingedruckten Holzschnitten.

Halle a/S.
Verlag von Louis Nebert.
1879.

~~VI, 3174~~
Math 1808.79
MAY 24 1884
Heaven fund.

Alle Rechte vorbehalten.

Vorbemerkung.

Dieses Schriftchen enthält die Regeln der Zusammensetzung und Zerlegung der Vectoren, die Definition der Quotienten zweier Vectoren und die daraus sich ergebenden Regeln der Multiplication derselben. Es beabsichtigt nicht allein zur Lectüre der Originalwerke über diesen Gegenstand anzuregen und das Verständniss derselben anzubahnen, sondern auch den Studirenden der Mathematik mit einer Disciplin überhaupt bekannt zu machen, die wie kein anderer Zweig der elementaren Mathematik geeignet ist, die Beziehungen der Raumgebilde klar zu legen und den Zusammenhang verschiedener Theile der Raumlehre aufzudecken.

Ich war bestrebt, den Leser von vornherein durch eingehende Betrachtung der Zahl und der Operation der Messung (Division) und der Multiplication im Allgemeinen auf den, wie ich glaube, richtigen Standpunkt zu stellen, und hoffe daher für die etwas umständlichere Darstellung dieser Begriffe Entschuldigung zu finden.

Bei den gegebenen Beispielen und Anwendungen war es mir um die Darstellung der Methode der Quaternionen zu thun, und ich glaubte dies besser an bekannten Beispielen als an wenig geläufigen Beziehungen des Raumes, die von dem Quaternionencalcul in Hülle und Fülle geboten werden, erzielen zu können.

Möge es mir gelungen sein, etwas zur Verbreitung dieser schönen Disciplin beizutragen.

Teschen.

Der Verfasser.

Inhalts-Verzeichniss.

Seite

Einleitung 1

I. Abschnitt:

Zusammensetzung und Zerlegung der Vectoren.

1. Begriff eines Vectors 7
2. Bedingungen der Gleichheit zweier Vectoren 8
3. Addition eines Vectors zu einem Punkte 9
4. Addition zweier Vectoren 9
5. Entgegengesetzte Vectoren 10
6. Subtraction zweier Vectoren 10
7. Vielfaches eines Vectors; Begriff einer Scalar 12
8. Begriff des Tensors und Versors eines Vectors 12
9. Bedingungen der Complanarität dreier Vectoren und der Collinearität ihrer Endpunkte 13
10. Die Addition beliebig vieler Vectoren ist eine associative und commutative Operation 14
11. Die Diagonale eines Parallelepipeds ist die Summe der drei in ihrem Anfangspunkte zusammenstossenden Kanten als Vectoren. 14
12. Die Vectorsumme der Seiten eines geschlossenen Polygons ist Null 15
13. Distributives Gesetz der Multiplication von Vectoren mit Scalaren. 15
14. Aus $a\alpha + b\beta = 0$ folgt $a = 0$, $b = 0$ 16
15. Aus $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$ folgt $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$ 16
16. Zerlegung eines Vectors nach drei senkrecht auf einander stehenden Richtungen 17
17. Beziehung zwischen den Methoden von Des Cartes und Hamilton; Eintheilung der Grössen in Scalaren und Vectoren. 18

II. Abschnitt:

Construction einer Quaternion.

18. Begriff einer Quaternion; Bedingungen der Gleichheit zweier Quaternionen 19
19. Eine Quaternion erfordert vier numerische Werthe zu ihrer vollständigen Bestimmung 21

Seite

20. Eine Quarternion besteht aus zwei Theilen, ein Theil ist das Verhältniss zweier in der Richtung zusammenfallenden, der andere das Verhältniss zweier einen rechten Winkel einschliessenden Vectoren 21
21. Axe der Quaternion 22
22. Der Quotient zweier rechtwinklichen Einheitsvectoren ist von der Natur eines Vectors 23
23. Definition des Quotienten zweier einen rechten Winkel einschliessenden Einheitsvectoren 25
24. Eine Quaternion zweigliederiger Form 25
25. Degenerirung einer Quaternion 26
26. Die Quaternion in Form eines Productes, Tensor, Versor, Norm derselben, Zusammenhang der trigonometrischen Functionen mit Quaternionen 26
27. Die quadrinomische Form einer Quaternion 27
28. Reciproke Quaternionen. 28
29. Conjugirte Quoternionen. 28

III. Abschnitt:

Addition und Subtraction von Quaternionen.

30. Addition der Quaternionen in binomischer Form 29
31. Summe und Differenz conjugirter Quaternionen 30
32. Addition und Subtraction der Quaternionen in quadrinomischer Form 30

IV. Abschnitt:

Multiplication der Vectoren.

33. Allgemeine Erklärung der Multiplication 31
34. Diese Erklärung passt auf alle Arten von Zahlen 31
35. Allgemeine Bemerkungen über die Gesetze der Multiplication . 32
36. Product zweier einen rechten Winkel einschliessenden Einheitsvectoren; das Quadrat eines Vectors; Vertauschung der Factoren. 33
37. Multiplication eines Vectors mit einer Zahl und umgekehrt . . 34
38. Gesetze der Multiplication dreier senkrecht zu einander stehenden Vectoren 35
39. Bemerkung über die Lage der räumlichen Coordinatenaxen . . 36
40. Product zweier einen beliebigen Winkel einschliessenden Einheitsvectoren; Nachweis des distributiven Gesetzes 37
41. Product beliebig langer Vectoren 38
42. Formeln und Sätze. 39
43. Potenzen eines Einheitsvectors; Nachweis der Richtigkeit des Exponentengesetzes 39

V. Abschnitt:

Multiplication der Quaternionen.

44. Product der Quaternionen in binomischer Form 41
45. Norm eines Productes 42

Seite

46. Vertauschung der Factoren. 43
47. Product der Vectoren in trinomischer Form 44
48. Ein Satz der analytischen Geometrie 45
49. Product zweier Quaternionen in quadrinomischer Form 46
50. Ein Satz der Zahlenlehre 46
51. Beweis des associativen Gesetzes aus dem distributiven . . . 46

VI. Abschnitt:

Producte von drei und mehr Vectoren.

52. Cyclische Vertauschbarkeit der Factoren in $S\alpha\beta\gamma$ 47
53. Geometrische Bedeutung von $S\alpha\beta\gamma$ 48
54. $V\gamma\beta\alpha$ 49
55. Product von vier Vectoren. 50
56. Beziehungen zwischen einem Vector ϱ und drei gegebenen anderen 51
57. Beispiele von Bestimmung und Elimination des Vectors ϱ aus gegebenen Scalargleichungen 51
58. $S\alpha\beta\gamma\delta$ 52
59. $S.V\alpha\beta V\gamma\delta$ 52
60. Cyclische Vertauschbarkeit der Factoren in $S\alpha\beta\gamma\delta$ 52

VII. Abschnitt:

Beispiele und Anwendungen.

1. Ein Viereck mit zwei parallelen gleichen Seiten ist ein Parallelogramm 53
2. Die Diagonalen eines Parallelogramms halbiren sich 53
3. Die Mittellinien eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte. 53
4. Bedingung unter der sich die von den Ecken eines Dreiecks zu Punkten der gegenüberliegenden Seiten gezogenen Geraden in einem Punkte schneiden. 54
5. Die Mittelpunkte der Geraden, welche die gegenüberliegenden Seiten eines Viereckes halbiren, fallen zusammen 56
6. Dieser Punkt fällt zusammen mit dem Halbirungspunkte der Geraden, die die Mittelpunkte der Diagonalen verbindet . . . 56
7. Werden von einem Parallelogramm durch zu den Seiten parallel gezogene Gerade zwei Parallelogramme abgeschnitten, so schneiden sich ihre Diagonalen mit der Diagonale des ursprünglichen in einem Punkte. 57
8. Sinus und Cosinus der Summe zweier Winkel 58
9. Summe der Quadrate der Diagonalen eines Parallelogramms . . 58
10. Winkel der Diagonalen eines Parallelogramms 58
11. Cosinussatz der ebenen Trigonometrie 59
12. Sinussatz der ebenen Trigonometrie 59
13. Mittelpunkt des dem Dreiecke umschriebenen Kreises 59
14. Durchschnittspunkt der Höhenperpendikel eines Dreieckes . . 61
15. Die Durchschnittspunkte der Mittellothe, der Mittellinien und der Höhenperpendikel liegen in einer Geraden 61
16. Mittelpunkt des dem Dreieck eingeschriebenen Kreises 62

Seite

17. Summe der Quadrate der Kanten eines vierseitigen Prisma . . 63
18. Bedingung, unter der sich die von den Ecken eines Tetraeders (einer dreiseitigen Pyramide) auf die gegenüberliegenden Flächen gefällten Perpendikel schneiden 64
19. Beziehungen zwischen den Kanten und Kantenwinkeln eines Tetraeders 65
20. Beziehungen zwischen den Flächen und Flächenwinkeln eines Tetraeders 65
21. Schwerpunkt eines Tetraeders bestimmt durch Vectoren . . . 66
22. Schwerpunkt des Tetraeders bestimmt durch cartesianische Coordinaten 67
23. Ableitung der Fundamentalformel der sphärischen Trigonometrie. 68
24. Sinussatz der sphärischen Trigonometrie. 68
25. Aequivalenz der Drehungen um die Ecken eines spärischen Dreieckes, spärische Summe der Winkel desselben 69
26. Summe der Winkel eines ebenen Dreieckes 71
27. Andere Fundamentalformel der sphärischen Trigonometrie . . 72
28. Beziehungen zwischen den Winkeln eines sphärischen Dreieckes *A, B, C* und den Richtungen *OA, OB, OC*. 72
29. Beziehungen zwischen dem sphärischen Excess und dem Radius des umschriebenen Kreises 72
30. Darstellung der Drehung eines starren Körpers um eine Axe . 74
31. Resultirende Drehung aus zwei endlichen Drehungen. 75
32. Resultirende Drehung aus zwei unendlich kleinen Drehungen . 75
33. Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht eines starren Körpers 76
34. Die Druckkräfte, die auf ein in einer Flüssigkeit eingetauchtes Tetraeder ausgeübt werden, halten sich Gleichgewicht vorausgesetzt, dass der Druck in der Flüssigkeit überall derselbe ist. 78

Einleitung.

Unter unbenannten Zahlen stellen wir uns gewöhnlich gewisse Mengen gleichartiger oder gleichartig gedachter Dinge oder Einheiten vor, indem wir von ihrer Art oder Benennung absehen. Mit dieser Vorstellung reichen wir bei der Addition und Subtraction aus; sie ist aber durchaus unstatthaft schon in dem Falle, wenn wir mit einer Zahl eine andere multipliciren sollen. Hiebei kann der Multiplicator nicht vorgestellt werden als eine Menge von Dingen (irgend welcher Art), sondern als die Forderung einer gewissen Operation, die mit dem Multiplicand vorgenommen werden soll. Wir müssen uns daher eine Zahl als einen Operator denken, der auf eine Grösse, ein Mass oder eine Einheit angewendet werden soll.

Eine Zahl derartig aufgefasst gibt uns die Antwort nicht so sehr auf die Frage „wie viel", als vielmehr auf die Frage „wie viel mal". Die Ausdrücke 50 Liter, 70 Aepfel sind abgekürzte Ausdrücke und bedeuten 50 mal ein Liter, 70 mal ein Apfel.

Der Anwendung und der Gewinnung eines solchen Zahlenausdruckes geht stets eine andere Operation voraus. Wollen wir das Quantum einer Flüssigkeit in einem Gefässe durch eine Zahl ausdrücken, so schöpfen wir etwa mit einem Litergefässe die Flüssigkeit aus (indem wir jedesmal dasselbe vollnehmen), zählen und gelangen dadurch zu dem Resultat: 50 mal ein Liter. Wollen wir für die Menge der Aepfel in einem Korbe einen Zahlenausdruck gewinnen, so nehmen wir je einen Apfel aus dem Korbe, zählen und erhalten das Resultat: 70 mal ein Apfel. Diese Ope-

ration also, durch die eine Zahl gewonnen wird, ist jedesmal eine Messung, selbst dann, wenn sie scheinbar im blossen Zählen besteht; und die Zahl ist das Resultat der Vergleichung oder Messung zweier Mengen, zweier Grössen oder, kurz gesagt, ihr Quotient.

In den meisten Fällen wird bei der Vergleichung zweier Grössen nur die Menge der gleichartigen Theile derselben in Betracht gezogen, dagegen, wenn sie in einer oder der anderen Beziehung von verschiedener Qualität sein sollten, von dieser Qualität abgesehen; dadurch entstehen die absoluten Zahlen, die den Gegenstand der Arithmetik bilden.

In gewissen Fällen kann die verschiedene Qualität zweier Grössen, die sonst in anderen Beziehungen von derselben Art sind, mit in der Zahl, die aus der Vergleichung oder Messung derselben hervorgeht, zum Ausdruck gebracht werden. Dazu ist notwendig, dass eine solche Grösse von bestimmter Qualität durch stetige Veränderung in eine Grösse von der anderen Qualität übergeführt werden könne.

Um uns nicht zu sehr in Allgemeinheiten zu bewegen, wählen wir einige concrete Beispiele. Die Masse eines Eisenstückes kann durch die Masse eines bestimmten Glaskörpes gemessen werden, wenn wir die beiden Massen im Sinne der Mechanik nehmen und von ihren sonstigen Qualitäten absehen. Das Resultat dieser Messung wird eine absolute Zahl sein. Wäre ein Process bekannt, durch dessen stetige Anwendung die Masse des Glaskörpers in die Masse des Eisenstückes verwandelt werden könnte, so wäre es nicht undenkbar, dass eine Zahl construirt werden könnte, welche nicht allein das Verhältniss der Massentheilchen ohne Rücksicht auf ihre Qualität, sondern zugleich auch das Verhältniss dieser verschiedenen Qualitäten zum Ausdruck bringen würde.

Denken wir uns einen Körper, behaftet mit einer gewissen Electricitätsmenge, so können wir durch gewisse Processe diese Electricitätsmenge stetig vermindern, bis der Körper alle Electricität verloren hat. Jener Process kann aber auch über diesen Punkt noch fortgesetzt werden; der Körper erscheint dann wieder mit einem Agens behaftet, das wir als Electricität anerkennen müssen, wiewol es der ursprünglichen Electricität direct entgegengesetzt ist. Das Verhältniss zweier Mengen dieser verschiedenen Electricitäten lässt sich durch eine Zahl ausdrücken nicht allein

hinsichtlich der absoluten Mengen, sondern auch hinsichtlich ihrer Art.

Auf einer geraden Linie befinde sich der Punkt A in einer gewissen Entfernung von einem fixen Punkte dieser Geraden O. Die Entfernung des Punktes A von O kann durch eine von A gegen O gerichtete Bewegung stetig vermindert werden, bis die Entfernung zwischen A und O verschwunden ist. Es kann aber dennoch diese Bewegung fortgesetzt werden, wodurch eine neue Entfernung entsteht, welche mit der ursprünglichen nicht gleicher Qualität, vielmehr ihr direct entgegengesetzt ist. Es sei nun der Punkt bis B gekommen, so wird das Verhältniss $OA : OB$, falls wir dabei auf diese entgegengesetzte Lage keine Rücksicht genommen haben, ausgedrückt werden durch eine absolute Zahl. Wollen wir diese entgegengesetzte Lage mit berücksichtigen, und dabei OA durch OB messen, so müssen wir zuerst bemerken, dass diess unmöglich ist; wir mögen OB in seiner Richtung noch so oft von O aus auftragen, so werden wir niemals A erreichen. Wollen wir diess aber dennoch thun, so müssen wir das Mass OB umgekehrt oder in entgegengesetzter Richtung nehmen. Wenn wir dann das Verhältniss angeben wollen, so muss noch an die absolute Zahl m, die wir erhalten haben, irgend ein Zeichen angebracht werden, dass das Mass in einer der seinigen entgegengesetzten Richtung angewendet worden ist. Dieses Zeichen ist —, oder (wenn wir es von der absoluten Zahl trennen und es mit der als Mass dienenden Einheit vereinigen) — 1. Genau so würde es sich verhalten, wenn wir OB durch OA messen wollten; auch hier müsste das Mass in entgegengesetzter Richtung in Anwendung kommen.

Liegen ferner die Punkte A und B auf einer Seite des Punktes O, so kann die Messung von OA durch OB vorgenommen werden, indem das Mass OB in seiner eigenen Richtung genommen wird; um nun diesen Fall von dem ersten genau zu unterscheiden, versehen wir den absoluten Wert des Verhältnisses auch mit einem Zeichen und zwar + oder + 1, und erhalten so die positiven Zahlen. Die positiven und negativen Zahlen heissen algebraische Zahlen und sind Gegenstand der Algebra.

Offenbar sind die algebraischen Zahlen allgemeinere Zahlen als die absoluten, da sie die letzteren in sich begreifen; denn

wofern man von der Qualität absieht, oder wofern dieselbe gleich ist, gehen sie sofort in die absoluten Zahlen über.*)

Die von einem Punkte O aus gemessenen Entfernungen oder Geraden können nicht allein einander entgegengesetzt sein, sie können vielmehr nach verschiedenen Richtungen des Raumes gezogen werden. Es ist aber stets möglich durch stetige Drehung eine Gerade aus einer Lage in eine beliebige andere zu bringen.

Zunächst gelang es eine Zahl für die Vergleichung zweier Geraden zu finden, die um einen rechten Winkel von einander abweichen. Offenbar kann wieder nicht eine Gerade als das Mass der anderen dienen, die mit der ersten einen rechten Winkel einschliesst; die messende Gerade muss erst um einen rechten Winkel (in einem oder in dem entgegengesetzten Sinne) gedreht worden sein, bevor sie diese Function übernehmen kann. Abermals ist es daher notwendig die Zahl, die das Verhältniss der absoluten Längen ausdrückt, mit einem Zeichen zu versehen um diese Drehung des Masses anzudeuten. Dieses Zeichen ist

$$\pm i = \pm \sqrt{-1}.$$

Es ergab sich dann leicht, dass, wenn man den Quotienten zweier Geraden angeben will, die einen beliebigen Winkel φ einschliessen, man das Verhältniss der absoluten Längen mit dem Zeichen oder Factor $\cos\varphi + i \sin\varphi$ zu versehen habe, um anzudeuten, dass das Mass erst um den Winkel φ gedreht worden war. Die so erhaltenen Zahlen werden complexe genannt. Sie sind allgemeiner als die algebraischen, da sie die letzteren umfassen.

So fruchtbar und nutzbringend sich nun auch die complexen Zahlen in der Algebra und Analysis erwiesen haben, so haben sie dennoch einen bedeutenden Mangel, indem durch sie nur das Verhältniss solcher Geraden, die in einer Ebene liegen, ausgedrückt werden kann, und es nicht gelungen ist, zwei solche Zahlen, die in verschiedenen Ebenen liegen, mit einander zu verknüpfen.

---

*) Das ausgezeichnetste Beispiel solcher Grössen, die nur des directen Gegensatzes fähig sind, sind die Zeiträume, die von einem bestimmten Zeitmomente in die Zukunft und in die Vergangenheit gemessen werden; daher nannte Hamilton die Algebra die Wissenschaft der Zeit.

Die Versuche, die in dieser Richtung gemacht worden sind, blieben ohne einen nennenswerten Erfolg.*)

Erst Sir William Rowan Hamilton gelang es 1843 nach zehnjähriger Bemühung eine Zahl zu construiren, die das Verhältniss irgend zweier, einen beliebigen Winkel einschliessenden Geraden ausdrückt, und die alle früher genannten Zahlen in sich einschliesst; sie wird eine Quaternion genannt.

Auf einen wesentlichen Umstand, durch den sich die Quaternionen von den früher angedeuteten Versuchen, die Zahlen auf den Raum auszudehnen und zu übertragen, unterscheiden, mag jetzt schon aufmerksam gemacht werden. Bei der algebraischen Behandlung des Problems wurde zwar eine beliebige, aber nur eine einzige Gerade als die positiven Zahlen versinnlichend angenommen, wodurch natürlich auch schon die Richtung der negativen und imaginären Zahlen festgestellt wird, während in den Quaternionen bei Hamilton jede beliebige Gerade positiv oder negativ sein kann. Durch dieses gleichsam genauere Anschliessen an die Natur des Raumes, in dem keine Richtung vor der anderen ausgezeichnet, vielmehr jede gleichartig ist, wird erzielt, dass alle Resultate, die durch Quaternionen gewonnen werden, von jeder Beziehung auf Axen frei und unabhängig sind.

Auf dem Grunde der Quaternionen baute Hamilton eine neue mathematische Disciplin auf, und schuf damit ein mächtiges Instrument, das sich als ausserordentlich nützlich in der Geometrie und mathematischen Physik erwiesen hat.

Die Haupt- und Quellenwerke über Quaternionen sind Hamilton's Schriften selbst und zwar namentlich seine „Lectures on Quaternions" 1853 und das posthume Werk „Elements of Quaternions" London 1866.

Ein Werk von grossem Werthe und Originalität ist „An elementary Treatise on Quaternions by J. G. Tait", Oxford 1873.

Ein anderes mehr elementares Werk Englands, wo die Qua-

*) Nach H. Scheffer (Ueber das Verhältniss der Arithmetik zur Geometrie, Braunschweig 1846.) ist das Zeichen der Zahl, welche das Verhältniss zweier Geraden, die in zwei, den Winkel ψ mit einander einschliessenden Ebenen liegen und gegeneinander um den Winkel φ geneigt sind, folgendes

$$(\cos\psi + \sin\psi . \sqrt{-1})(\cos\varphi + \sin\varphi . \sqrt{-1}).$$

ternion in Mittel- und Hochschulen immer mehr Verbreitung finden, ist „Introduction to Quaternions by P. Kelland and P. G. Tait", London 1873.

Die drei letztgenannten Werke waren es, die mir bei der Ausarbeitung des folgenden Schriftchens zur Hand waren.

Von deutschen Werken müssen hervorgehoben werden:

„Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Functionen, von Dr. Hermann Hankel", Leipzig 1867 und

„Theorie der goniometrischen und longimetrischen Quaternionen von K. V. Unverzagt", Wiesbaden 1876, in welchem letzteren Werke die Quaternionen mit älteren verwandten Theorien (barycentrischer Calcul von A. F. Möbius, Leipzig 1827) verknüpft und durch Einführung neuer, der sogenannten longimetrischen Quaternionen erweitert werden.

Von französischen Darstellungen behandeln den Gegenstand „Essai sur le Calcul des Quaternions par M. Allégret" und mehrere Abhandlungen von Laisant, welch' letztere besonders die mechanischen Anwendungen dieser Rechnung zum Ziele haben.

Bevor wir an die Construction einer Quaternion d. h. des Quotienten zweier Geraden von beliebiger Richtung gehen, wird es nothwendig sein, sich etwas mit den Geraden unter Berücksichtigung ihrer Richtung zu befassen.

Erster Abschnitt.

Zusammensetzung und Zerlegung der Vectoren.

1. Zwei geometrische Punkte im Raume können sich nur durch ihre Lage unterscheiden.

Schon in der Einleitung wurde der Gedanke angedeutet, dass der Unterschied zweier Objecte am leichtesten beurtheilt werden kann nach einem solchen stetigen Process, durch den ihre Verschiedenheit ausgeglichen wird.

Nun ist dieser Process, der die Verschiedenheit zweier Punkte im Raume auszugleichen vermag, einzig und allein die Bewegung, durch welche der Punkt A in die Lage des Punktes B übergeführt wird*). Wir sehen daher die Aufeinanderfolge aller jener Lagen, die nach und nach der Punkt A einnehmen muss, um die Lage des Punktes B zu erreichen, als den Unterschied des Punktes B von A an. Zwar kann diese Aufeinanderfolge verschiedene Formen annehmen, indem durch mannigfaltige Bewegungen A nach B gelangen kann, die alle somit gleichwerthig sind, aber eine Form

*) Ueberhaupt gelangen wir zum Bewusstsein der Verschiedenheit zweier Punkte im Raume einzig und allein durch die Bewegung. Mag das zum Bewusstsein seiner und der Aussenwelt erwachende Kind nach einem glänzenden Gegenstande das Auge wenden und die Hand strecken, mag es später durch Schreiten irgend ein Ziel erreichen, mag der angehende Zeichner prüfend die Spitze des Bleis über die vorgelegte Zeichnung führen und selbst der geübteste Geometer Fixsternweiten mit der Geschwindigkeit des Lichtes messen, immer ist das, was uns die Auffassung des Unterschiedes zweier Punkte vermittelt, eine Bewegung, durch die entweder in Wirklichkeit oder in Gedanken ein Punkt in die Lage des andern übertragen oder überführt wird.

darunter ist die einfachste; es ist dies jene, bei welcher die einmal eingeschlagene Richtung nicht geändert wird. Diese einfachste Aufeinanderfolge der Zwischenpunkte bildet dann eine Gerade, welche die leichteste Beurtheilung des Unterschiedes der beiden Punkte ermöglicht, indem sie nur durch zwei Elemente die einmal eingeschlagene Richtung und die Länge des Weges bedingt wird. Wir wählen demnach als Definition des Unterschiedes oder der Differenz der Punkte die sie verbindende Gerade, oder in Zeichen

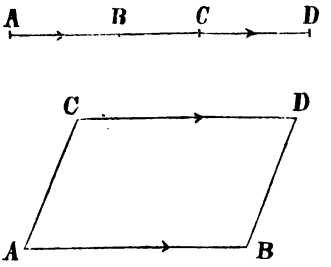
$$B - A = AB.$$

Die Gerade AB gibt dann ebensowol eine bestimmte Richtung, als eine bestimmte Strecke an und wird, so aufgefasst, Vector genannt.*)

2. Der Begriff eines Vectors enthält nur zwei Merkmale Richtung und Länge; wenn demnach zwei Vectoren in diesen Merkmalen übereinstimmen, so können sie sich nur durch den Ort unterscheiden, in welchem sie sich befinden; stimmen sie auch in dem Orte überein, d. h. fallen ihre Anfangspunkte und Endpunkte zusammen, so sind sie identisch. Da wir aber von dem Orte absehen, so sind zwei Vectoren gleich, wenn sie dieselbe Richtung und dieselbe Länge haben.

Es sind demnach zwei gleich grosse Theile einer einzigen Geraden in derselben Richtung genommen einander gleich. Aber auch zwei gegenüber liegende Seiten eines Parallelogramms sind gleich, wenn wir sie in derselben Richtung nehmen.

Fig. 1.



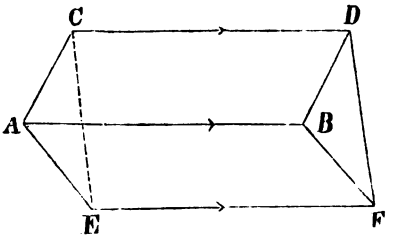
Wir können demnach auch sagen, zwei Vectorn sind gleich, wenn sie durch eine einfache Verschiebung ohne Drehung so übereinandergelegt werden können, dass ihre Anfangs- und Endpunkte zusammenfallen.

---

*) In den longimetrischen Quaternionen fasst Unverzagt AB als den Quotienten $\frac{B}{A}$ auf und nennt dann AB einen Quotientvector.

Sind zwei Vectoren einem dritten gleich, so sind sie auch untereinander gleich und die drei gleichen Vectoren bilden dann die drei parallelen Kanten eines Prisma.

Fig. 2.



3. Mit einer algebraischen Differenz verbinden wir stets den Sinn, dass diese Differenz zum Subtrahend hinzugefügt den Minuend gibt, dass also

$$(B-A)+A=B.$$

Indem wir nun die in § 1 gegebene Differenz als eine solche ansehen und durch den Vector AB ersetzen, erhalten wir

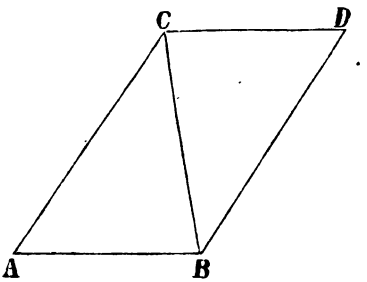
$$AB+A=B,$$

d. h. in Worten, ein Vector als Addend hinzugefügt zu seinem Anfangspunkt, versetzt oder verschiebt denselben in die Lage des Endpunktes.

Sollte ein anderer Vector A_1B_1 zu A addirt werden, der mit AB gleich ist, so kann die Summe A_1B_1+A ersetzt werden durch $AB+A$, d. h. ein beliebiger Vector als Addend hinzugefügt zu einem beliebigen Punkte bewirkt die Verschiebung dieses Punktes in der Richtung des Vectors um eine Strecke, die der Länge desselben gleich ist. (Daher auch der Name Vector).

4. Ist AB ein Vector und BC ein anderer Vector, dessen Anfangspunkt mit dem Endpunkte des ersten zusammenfällt, so können wir die Summe derselben auf folgende Art finden. Wir fügen den Vector AB als Addend zu dem Punkte A und zu dem Resultate ferner den Vector BC oder in Zeichen

Fig. 3.



$$(C-B)+[(B-A)+A]$$
$$=(C-B)+B=C$$

oder

$$(C-B)+(B-A)+A=C$$

andererseits ist aus der Figur ersichtlich, dass

$$(C-A)+A=C$$

und daher

$$C-B+(B-A)=C-A,$$

und wenn man statt der Punktdifferenzen die Vectoren einsetzt

$$BC+AB=AC$$

d. h. die Summe der beiden Vectoren AB und BC ist ein dritter Vector, der den Anfangspunkt des ersten mit dem Endpunkt des zweiten verbindet.

Sollte zu AB ein anderer Vector $B'C'$ addirt werden, der mit BC gleich wäre, so wäre doch die Summe dieselbe.

Die Addition zweier beliebiger Vectoren kann also geometrisch ausgeführt werden, indem man den zweiten Addenden in seiner Richtung an den Endpunkt des ersten Addenden anfügt und den Anfangspunkt des ersten mit dem Endpunkte des zweiten verbindet; der aus der Verbindung hervorgehende Vector ist die Summe.

Aus der Construction ergibt sich unmittelbar der Satz, dass die beiden Addenden miteinander vertauscht werden können, ohne dass die Summe geändert würde. Denn schiebt man AB parallel zu sich selbst nach CD vor, so ist $BD=CD+BC$ und da BD parallel, gleichgerichtet und gleich lang mit AC ist, so hat man

$$BC+AB=AB+BC.$$

5. Um zu AB den Vector BA zu addiren, müsste man in B den Vector BA anfügen; es müsste somit der Anfangspunkt des ersten mit dem Endpunkte des zweiten zusammenfallen; der resultirende Vector ist daher gleich 0. Diess ergibt sich auch aus der Differenzgleichung

$$(B-A)+(A-B)=0,$$

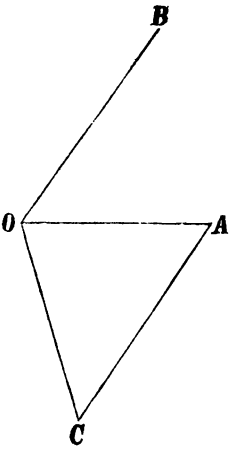
Die Vectoren AB und BA neutralisiren sich daher, oder sind direct entgegengesetzt. Wird nun AB mit $+\alpha$ bezeichnet, so muss BA mit $-\alpha$ bezeichnet werden.

Wäre zu AB nicht der Vector BA, sonderen ein anderer ihm gleicher B_1A_1 zu addiren, so wäre die Summe dieselbe, wie im ersten Falle, und die beiden Vectoren würden sich ebenfalls neutralisiren. Offenbar lässt sich dieser Satz auch umkehren: nur zwei direct entgegengesetzte und an Grösse gleiche Vectoren können sich neutralisiren oder die Summe 0 geben.

6. Die Subtraction zweier Vectoren lässt sich conform der Addition ausführen, wenn man den Subtrahend nicht in seiner

eigenen, sondern in der entgegengesetzten Richtung an den Endpunkt des Minuends anfügt. Ist $OA = \alpha$ und $OB = \beta$, so construirt man $\alpha - \beta$, indem man in A zu OB eine Parallele zieht und auf derselben in einer Richtung, die OB entgegengesetzt ist, also von A bis $C - \beta$ aufträgt, so ist dann $OC = \gamma = \alpha - \beta$.

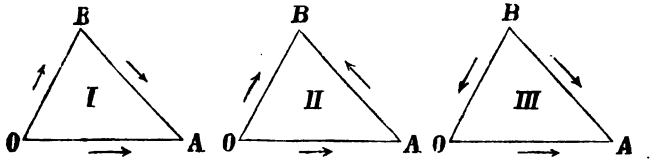
Fig. 4.



Anmerkung. Sieht man in einem Dreieck die Seiten als Vectoren an, so kann jede Seite entweder als die Summe der beiden anderen, oder als ihre Differenz gelten; es kommt nur auf die Richtung an, welche die beiden anderen als Vectoren haben.

Ist nämlich (in I) der Anfangspunkt der Seite OA oder des Vectors α übereinstimmend mit dem Anfangspunkte des Vectors $OB = \beta$ und wird die Seite BA als Vector mit γ bezeichnet, so dass also γ vom Scheitel B zum Endpunkte von α geht, so ist $\alpha = \beta + \gamma$.

Fig. 5.



Wenn dagegen die beiden anderen Seiten als Vectoren im gegenüberstehenden Scheitel ihren gemeinsamen Endpunkt haben, wenn also (in II) OB mit β und AB mit γ bezeichnet wird, so ist der Vector α die Differenz der beiden anderen, und zwar ist jener derselben der Minuend, der mit α denselben Anfangspunkt hat:

$$\alpha = \beta - \gamma.$$

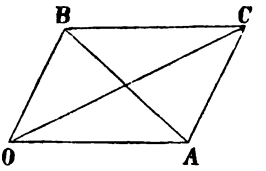
Wenn endlich (in III) die beiden anderen Vectoren von dem gegenüberliegenden Scheitel als ihrem gemeinsamen Ursprunge ausgehen, so ist der erste Vector auch der Differenz der beiden anderen gleich, wobei aber jener Vector, der im Endpunkte

von α seinen Endpunkt hat, als Minuend zu nehmen ist, also

$$\alpha = \gamma - \beta.$$

Betrachtet man in einem Parallelogramm zwei zusammenstossende Seiten als Vectoren, die von demselben Ursprung ausgehen, so ist die Diagonale desselben Ursprungs die Summe der beiden Seitenvectoren, dagegen ist die andere Diagonale gleich ihrer Differenz; ist

Fig. 6.



$$OA = \alpha,\ OB = \beta,\ OC = \gamma,\ AB = \delta,$$

so ist

$$\gamma = \alpha + \beta;\quad \delta = \beta - \alpha.$$

Alle diese Fälle lassen sich leicht merken, wenn man überlegt, dass man in jedem Falle, von demselben Punkte ausgehend, zu demselben Endpunkte gelangen muss, wobei die Vectoren bald in ihrer, bald in der entgegengesetzten Richtung durchlaufen werden müssen.

7. Die Summe von mehreren gleichgerichteten und auch hinsichtlich ihrer Länge gleichen Vectoren ist ein Vielfaches eines solchen Vectors und kann durch $m\alpha$ ausgedrückt werden, worin m eine ganze Zahl bedeutet. Ebenso kann das Vielfache eines Bruchtheiles eines Vectors durch $m\alpha$ angegeben werden, wo m eine gebrochene Zahl darstellt; dieses ist auch noch in dem Falle möglich, wenn man bis an die äusserste Grenze der Kleinheit der Bruchtheile geht, wo dann m eine irrationale Zahl ist. Soll aber der Vector oder sein Bruchtheil in einer Richtung, die der seinigen direct entgegengesetzt ist, vervielfacht werden, so muss m eine negative Zahl sein. Demnach bedeutet die Gleichung

$$\alpha = x\beta,$$

dass die beiden Vectoren α und β entweder Theile einer Geraden oder parallel sein müssen.

Die Zahl x (die also eine positive oder negative, ganze, gebrochene und auch irrationale ist) kann gewonnen werden durch Vergleichung der Vectoren α und β auf einem geradlinigen Massstab oder einer Scala und wird daher von Hamilton eine Scalar genannt.

8. Ein jeder Vector α kann dargestellt werden als das Produkt aus einem Einheitsvector seiner eigenen Richtung und einer

Zahl, der sogenannten Masszahl, welche die Anzahl der Längeneinheiten angibt. Die auf einem Vector aufgetragene Längeneinheit wird aus später zu erörternden Gründen Versor von α genannt und durch $U\alpha$ bezeichnet.*) Die Zahl der Längeneinheiten, die der Vector enthält, wird Tensor von α genannt und durch das Symbol $T\alpha$ dargestellt. Es ist demnach

$$\alpha = T\alpha \,.\, U\alpha, \ldots\ldots\ldots (1)$$

worin $T\alpha$ die Strecke, $U\alpha$ die Richtung von α angibt.

9. Sind α, β, γ drei Vectoren desselben Ursprungs, von denen einer, etwa γ, als die Summe der beiden anderen angesehen werden darf, so lässt sich aus ihnen ein Dreieck construiren und sie liegen daher in einer Ebene, diess ist auch noch dann der Fall, wenn aus beliebigen Strecken, oder Abschnitten des einen und des anderen Vectors der dritte als Summe hervorgeht; die Gleichung daher

$$x\alpha + y\beta = \gamma,$$

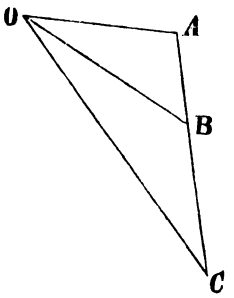
welche auch in der Form

$$x\alpha + y\beta + z\gamma = 0 \ldots\ldots\ldots (2)$$

geschrieben werden kann, weil darin x und y beliebige Zahlen bedeuten können, drückt die Bedingung aus, unter welcher die drei Vectoren α, β, γ in einer Ebene liegen oder complanar sind. Sieht man darin γ und die Scalaren x, y und z als Variable an, während α und β als gegeben betrachtet werden, so stellt diese Gleichung die durch α, β gelegte Ebene dar.

Wenn nun die drei Vectoren $OA = \alpha$, $OB = \beta$, $OC = \gamma$ die obere Gleichung befriedigen, so kann es geschehen, dass die drei Endpunkte derselben A, B, C in einer Geraden liegen; damit diess stattfinde, muss

Fig. 7.



$$\frac{AB}{BC} = \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \beta} = t$$

sein, wo t eine Scalar bedeutet. Aus dieser Gleichung folgt aber

$$\beta - \alpha = t\gamma - t\beta \text{ oder}$$
$$-\alpha + (1+t)\beta - t\gamma = 0.$$

Es muss also die Summe der Coefficienten von α, β, γ nämlich

*) Unit-Vector englisch so viel als Einheitsvector.

$-1+1+t-t$ identisch der Null gleich sein. Wenn also die beiden Gleichungen

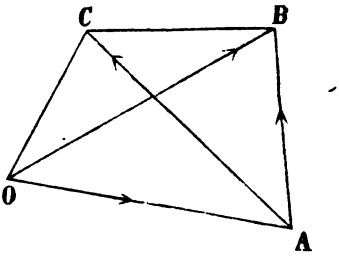
$$a\alpha+b\beta+c\gamma=0 \text{ und } a+b+c=0 \ldots\ldots\ldots (3)$$

richtig sind, so sind die vier Punkte O, A, B, C complanar und die Punkte A, B, C collinear.

10. Sind mehrere Vectoren zu addiren, so wird man an den ersten den zweiten, an diesen den dritten u. s. w. jedesmal in seiner Richtung anfügen. Der Vector, der den Anfangspunkt des ersten mit dem Endpunkte des letzten verbindet, ist der resultirende Vector oder die verlangte Summe.

Es kann leicht gezeigt werden, dass hierbei die Ordnung der Addenden und ihre Vertheilung gleichgiltig ist. Die Gesetze der Algebra, dass bei einer Addition mehrerer Addenden, diese zu beliebigen Gruppen erst vereinigt und dann summirt, so wie, dass diese Addenden versetzt werden können, welche man als das associative und commutative Gesetz der Addition bezeichnet, haben auch hier ihre Geltung. Denn die Summe von irgend einer Anzahl aufeinander folgender Vectoren OA, AB, BC ist die Gerade OC, welche von dem Anfangspunkte des ersten O zum Endpunkte C des letzten gezogen ist; weil nun, wenn etwa drei solcher Vectoren gegeben sind, wir die beiden Diagonalen OB, AC des (ebenen oder nicht ebenen) Viereckes $OABC$ ziehen und nach Belieben OC, entweder als die Summe von OA und AC, oder als die Summe von OB und BC ansehen können, so folgt daraus

Fig. 8.



$$\gamma+\beta+\alpha=(\gamma+\beta)+\alpha=\gamma+(\beta+\alpha) \ldots\ldots\ldots (4)$$

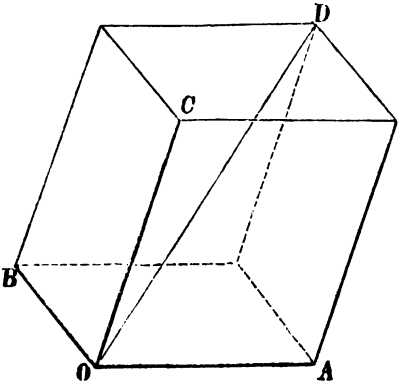
und weil überdiess $\beta+\alpha=\alpha+\beta$,

so ist damit das associative und commutative Gesetz der Addition bewiesen.

11. (Fig. 9.) Sind von dem gemeinsamen Ursprung O drei Vectoren OA, OB, OC gezogen und man construirt aus denselben als Kanten ein Parallelepiped, so ist die Diagonale desselben, welche den Ursprung mit dem gegenüberliegenden Eck verbindet, die Summe jener drei Vectoren, also

$OD = OA + OB + OC.$

Fig. 9.



12. Die Summe von beliebig vielen Vectoren AB, BC, CD ... MN wird nach § 10 erhalten, wenn man den Anfangspunkt des ersten A mit dem Endpunkte des letzten N verbindet also

$$AN = AB + BC + CD + \ldots + MN.$$

Durch diese Construction entsteht aber ein geschlossenes Polygon und die vorstehende Gleichung kann auch geschrieben werden

$$AB + BC + CD + \ldots + MN - AN = 0$$

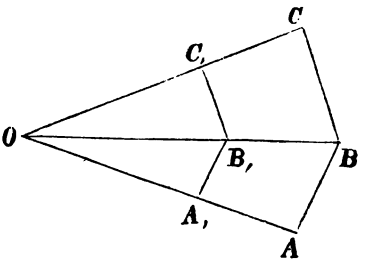
oder $$AB + BC + CD + \ldots + MN + NA = 0.$$

Diese Gleichung besagt, dass die Summe der aufeinander folgenden Seiten eines geschlossenen Polygons, diese Seiten als Vectoren genommen, gleich ist Null, oder die Vectorsumme der aufeinander folgenden Seiten eines geschlossenen Polygons ist gleich Null.

13. (Fig. 10.) Es sei $OA = \alpha$, $AB = \beta$, $BC = \gamma$; so ist

$$OC = \alpha + \beta + \gamma.$$

Fig. 10.



Trägt man auf OA ein Stück bis OA_1 auf, das zu OA das Verhältniss m hat und zieht von A_1 eine Parallele zu AB, die OB in B_1 trifft und von B_1 eine Parallelle zu BC, von der OC in C_1 geschnitten wird, so ist

$$OA_1 = m\alpha, \quad A_1B_1 = m\beta, \quad B_1C_1 = m\gamma; \text{ und ebenso}$$

$$OC_1 = m \,.\, OC = m(\alpha + \beta + \gamma)$$

andererseits aber

$$OC_1 = OA_1 + A_1B_1 + B_1C_1 = m\alpha + m\beta + m\gamma$$

somit

$$m(\alpha + \beta + \gamma) = m\alpha + m\beta + m\gamma.$$

Es ist ferner auch leicht einzusehen, dass, wenn m, n, p Scalaren bedeuten (§ 7) die Gleichung richtig ist:

$$m\alpha + n\alpha + p\alpha = (m + n + p)\,\alpha.$$

Die zwei letzten Gleichungen sagen aus, dass das distributive Gesetz der Algebra, nach welchem eine Summe mit einem Factor multiplicirt wird, wenn die Einzelproducte aus jedem Summanden und dem Factor gebildet und hierauf in eine Summe vereinigt werden, auch bei der Multiplication der Vectoren mit Scalaren Geltung hat, und zwar sowol bezüglich des Multiplicators als auch des Multiplicands.

14. Sind α und β zwei Vectoren desselben Ursprungs, verschiedener Richtung und von wirklicher (nicht verschwindender Länge); bedeuten a und b Scalaren, und es ergibt sich bei einer Untersuchung die Gleichung

$$a\alpha + b\beta = 0,$$

so kann diese Gleichung nicht bestehen, ausser es ist

$$a = 0, \quad b = 0.$$

Denn es kann nicht eine der beiden Scalaren von Null verschieden sein, wenn die andere gleich Null ist; es können aber auch nicht beide von Null verschieden sein, weil sonst aus $a\alpha$ und $b\beta$ ein resultirender Vector construirt werden könnte, der von Null verschieden sein müsste, da nach § 5 nur zwei entgegengesetzte Vectoren sich neutralisiren können.

15. Bedeuten α, β, γ drei nicht complanare Vectoren desselben Ursprungs und wirklicher Länge a, b, c Scalaren, so folgt aus der Gleichung

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$$

$$a = 0, \quad b = 0, \quad c = 0.$$

Denn $b\beta + c\gamma$ kann ersetzt werden durch $b_1\beta_1$, worin b_1 eine neue Scalar, β_1 einen neuen mit β und γ complanaren mit α nicht parallelen Vector bedeuten. Es ist demnach

$$a\alpha + b_1\beta_1 = 0;$$

daraus folgt $a = 0$

und aus dem nun übrigbleibenden Theile der Gleichung

$$b\beta + c\gamma = 0$$

endlich $b = 0, \; c = 0.$

Daraus ergibt sich, wenn a_1, b_1, c_1 neue Scalaren bedeuten, dass aus der Gleichung

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = a_1\alpha + b_1\beta + c_1\gamma$$

die Beziehungen folgen

$$a = a_1, \quad b = b_1, \quad c = c_1.$$

Man kann nämlich durch Transposition der Glieder und mit Hilfe des distributiven Gesetzes die Gleichung bringen auf die Form

$$(a-a_1)\alpha + (b-b_1)\beta + (c-c_1)\gamma = 0$$

und daher $a-a_1 = 0, \quad b-b_1 = 0, \quad c-c_1 = 0.$

Ebenso folgt bei nur zwei Vectoren unter denselben Bedingungen aus der Gleichung

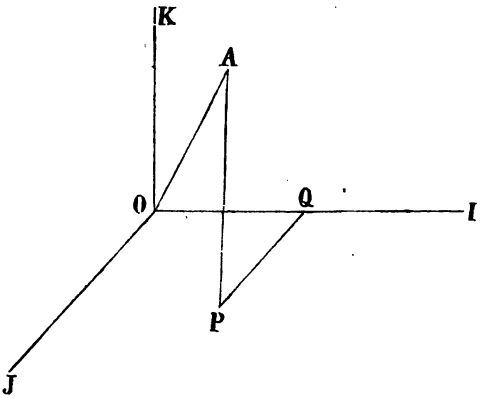
$$a\alpha + b\beta = a_1\alpha + b_1\beta,$$

dass $a = a_1$ und $b = b_1$ sei.

16. So wie ein Vector aus mehreren anderen Vectoren zusammengesetzt wird, ebenso kann ein Vector in zwei oder mehrere Vectoren zerlegt werden. Diese Aufgabe ist im Allgemeinen eine unbestimmte. Einer besonderen Erwähnung bedarf die Zerlegung eines Vectors in drei Vectoren, die zu drei fixen, in einem Punkte sich schneidenden und aufeinander senkrecht stehenden Geraden parallel sind. Diese Zerlegung lässt sich stets nur auf eine einzige Art ausführen.

Es seien $OA = \alpha$ der zu zerlegende Vector Oi, Oj, Ok die drei zu den fixen Geraden durch den Anfangspunkt O gezogenen parallelen Vectoren, deren Versoren wir der Reihe nach mit i, j, k bezeichnen wollen. Fällen wir nun von A ein Perpendikel auf die durch i und j gelegte Ebene, dessen Fusspunct P ist, so ist PA parallel zu k und somit gleich zk;

Fig. 11.



zieht man ferner in dieser Ebene von P eine Senkrechte PQ auf Oi, so ist sie parallel zu j und gleich yj; OQ endlich ist gleich xi. Die Scalaren x, y, z sind nur von der Länge und Richtung von α abhängig. Nun ist

$$OA = OQ + QP + PA$$

oder $$\alpha = xi + yj + zk.$$

Für einen anderen Vector β würde man finden

$$\beta = x_1 i + y_1 j + z_1 k. \ldots\ldots\ldots (5)$$

Sind α und β gleich, also in Länge und Richtung übereinstimmend, so ist

$$x = x_1, \quad y = y_1, \quad z = z_1; \ldots\ldots\ldots (6)$$

oder eine Gleichung zwischen zwei Vectoren ersetzt drei numerische Gleichungen.

Man ersieht sofort dass x, y, z die cartesianischen rechtwinkligen Coordinaten des Punktes A sind. *)

17. Die Einführung der Coordinatenaxen in die Geometrie durch Des Cartes war einer der grössten Fortschritte in der Entwickelung der Mathematik; dadurch werden die Constructionen der Geometrie in Berechnungen numerischer Grössen umgewandelt.

Die Lage eines Punktes (in der analytischen Geometrie) wird von den Längen dreier Geraden, die in bestimmten Richtungen gezogen werden, abhängig gemacht. Für die Zwecke physikalischer und auch geometrischer Untersuchungen ist es aber oft wünschenswerth, die umständliche Benützung der cartesianischen Coordinaten zu vermeiden und unmittelbar die Lage eines Punktes statt seiner drei Coordinaten, oder auf einmal die Grösse und Richtung einer Kraft statt ihrer drei Componenten anzugeben. Obwohl diese Art und Weise, geometrische und physikalische Grössen zu betrachten die ursprünglichere und natürlichere ist als die andere, so sind doch die damit verknüpften Ideen erst durch den nächsten grossen Schritt in der Behandlung des Raumes, den Hamilton durch die Erfindung des Quaternionencalculs unternahm, zur vollen Entwickelung gelangt.

Eine der wichtigsten Eigenthümlichkeiten von Hamilton's Methode ist seine Eintheilung der Grössen in Scalaren und Vectoren.

Eine Scalargrösse kann durch eine einzige numerische Bestimmung definirt werden. Ihr numerischer Werth hängt in keiner Art und Weise von der Richtung, die wir den Coordinatenaxen geben ab; sie selbst ist richtungslos. Das Volumen einer geometrischen Figur, die Masse und Energie eines materiellen Körpers, der hydrostatische Druck in einem Punkte der Flüssig-

*) Hinsichtlich der Figur vergl. § 38 und § 39.

keit, das Potential eines Punktes im Raume sind Beispiele von Scalargrössen.

Ein Vector oder eine Grösse, die Richtung hat, erfordert zu ihrer Definition drei numerische Bestimmungen, welche abhängig sind von den Richtungen, die wir den Coordinatenaxen geben. Die Verschiebung eines Punktes, die Geschwindigkeit eines Körpers, sein Moment, die auf ihn wirkende Kraft, ein electrischer Strom, die Magnetisirung eines Eisenpartikelchens sind Beispiele von Vectorgrössen.

Zweiter Abschnitt.

Construction einer Quaternion.

18. In der Einleitung wurde eine Quaternion als der Quotient zweier beliebig gerichteter Vectoren definirt. Wir wollen nun auf diesen Begriff näher eingehen.

a) Denken wir uns von zwei Punkten des Raumes O und O_1 zwei beliebige Vectoren α, β gezogen, ihr Verhältniss oder ihr Quotient werde auf gewöhnliche Art durch $\frac{\alpha}{\beta}$ bezeichnet.

Wir können einen dieser Vectoren etwa β so lange parallel zu sich selbst längs der Geraden O_1O verschieben, bis ihre Anfangspunkte zusammenfallen, dann kann durch die beiden Vectoren eine Ebene gelegt werden.

Die Bestimmung des Verhältnisses zweier irgendwie und irgendwo gelegener Vectoren kann also stets auf die Bestimmung des Verhältnisses zweier in einer Ebene von einem gemeinsamen Ursprung ausgehender Vectoren zurückgeführt werden.

b) Es sei ferner im Punkte O_1 ein von β derart verschiedener Vector γ gezogen, dass, wenn wir seinen Anfangspunkt durch parallele Verschiebung des Vectors nach O versetzt haben, dann die durch α und den neuen Vector gelegte Ebene (α, γ)

nicht mit der Ebene (α, β) zusammenfällt, so ist $\frac{\alpha}{\beta}$ verschieden von $\frac{\alpha}{\gamma}$, weil eben β von γ verschieden ist; d. h. das Verhältniss zweier Vectoren ist verschieden von dem Verhältniss zweier anderen Vectoren, wenn diese Vectorenpaare nicht in einer Ebene untergebracht werden können.

In den Begriff des Verhältnisses zweier Vectoren muss demnach die Bestimmung der Lage ihrer Ebene eintreten.

c) Es sei von dem gemeinsamen Ursprung O ausser α und β in ihrer Ebene ein dritter von β verschiedener Vector γ gezogen, der also mit α einen anderen Winkel einschliesst als β, so wird wieder $\frac{\alpha}{\beta}$ verschieden sein von $\frac{\alpha}{\gamma}$.

Das zweite Merkmal des Verhältnisses zweier Vectoren ist also der Winkel, den die Vectoren einschliessen. Diesen Winkel wollen wir stets durch die Grösse der einfachsten Drehung bestimmen, welche nothwendig ist, um den Vectordivisor in die Lage des Vectordividends zu bringen. Da diese Drehung in dem einen oder in dem entgegengesetzten Sinne vorgenommen werden muss, so muss sowohl die absolute Grösse des Drehungswinkels als auch der Sinn der Drehung derselbe sein, wenn nicht die Verhältnisse je zweier Vectoren verschieden sein sollen.

d) Wäre der dritte Vector γ von β nur in der Länge verschieden, so wäre dennoch $\frac{\alpha}{\beta}$ verchieden von $\frac{\alpha}{\gamma}$. Wir erkennen also als drittes Merkmal des Quotienten zweier Vectoren das Verhältniss ihrer absoluten Längen.

Wir setzen demnach als Definition fest:

Das Verhältniss zweier Vectoren α und β ist dem Verhältnisse zweier anderer Vectoren α_1 und β_1 gleich,

1. wenn beide Vectorenpaare in einer und derselben Ebene, oder in parallelen Ebenen liegen;
2. wenn Grösse und Sinn der Drehung, durch welche der Divisorvector in die Lage des Dividends gebracht wird, übereinstimmen;
3. wenn das Verhältniss der absoluten Längen des Dividends und Divisors in beiden Fällen dasselbe ist.

Aus dieser Definition folgt, dass das Verhältniss der Vectoren

nicht geändert wird, wenn ihre Tensoren in demselben Verhältniss verlängert oder verkürzt werden, und wenn die Winkelfläche sammt den Vectoren (als starr angesehen) um den gemeinsamen Durchschnittspunkt in ihrer Ebene durch einen beliebigen Winkel gedreht wird, weil dadurch die Abweichung der Richtungen der Schenkel nicht geändert wird, und endlich, wenn ihre Ebene parallel zu sich selbst verschoben wird.

19. Das Verhältniss der absoluten Längen der Vectoren, lässt sich durch einen numerischen Werth, durch eine Zahl (Scalar) ausdrücken, ebenso die Grösse des Winkels durch eine andere Zahl, welche positiv oder negativ genommen auch den Sinn der Drehung zum Ausdruck bringen kann.

Die Bestimmung einer Ebene erfordert aber die Angabe zweier numerischer Werthe etwa:

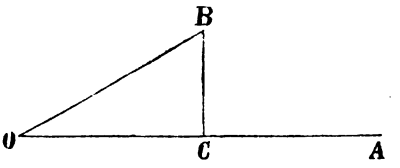
a) Die Angabe des Winkels, unter welchem diese Ebene gegen eine andere fixe Ebene z. B. die des Tisches geneigt ist;

b) Die Angabe des Winkels, den die Durchschnittsgerade der beiden Ebenen (der zubestimmenden und der fixen) mit einer in der fixen Ebene gezogenen fixen Geraden z. B. dem Rande des Tisches bildet.

Das Verhältniss zweier Vectoren erfordert demnach zu seiner vollkommenen Bestimmung vier numerische Werthe; darum hat eben Hamilton den Ausdruck dieses Verhältnisses eine Quaternion genannt. Eine Gleichung zwischen zwei Quaternionen ersetzt demnach vier numerische Gleichungen.

20. Es seien nun OB, OA zwei beliebige Vectoren, deren Verhältniss $OB : OA = \frac{OB}{OA}$ bestimmt werden soll. Ihre Tensoren seien b, a ihre Versoren, oder die auf ihren Richtungen aufgetragenen Längeneinheiten β und α, so dass

Fig. 12.



$$OB = b\beta \text{ und } OA = a\alpha.$$

Fällt man von B eine Senkrechte auf OA, so ist

$$OB = OC + CB$$

und

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OC + CB}{OA} = \frac{OC}{OA} + \frac{CB}{OA}.$$

Nennen wir φ den Winkel AOB, so ist die absolute Länge $OC = b\cos\varphi$, jene von $CB = b\sin\varphi$ und der Vector $CB = b\sin\varphi.\delta$, wenn sein Versor mit δ bezeichnet wird. Daher ist

$$\frac{OB}{OA} = \frac{b\cos\varphi.\alpha}{a.\alpha} + \frac{b\sin\varphi.\delta}{a.\alpha}$$

oder

$$= \frac{b}{a}\left(\cos\varphi + \frac{\delta}{\alpha}.\sin\varphi\right). \ldots\ldots\ (7).$$

Demnach besteht der Quotient zweier beliebig geneigter Vectoren aus zwei Theilen; der erste Theil ist der Quotient zweier in ihren Richtungen zusammenfallenden Vectoren $OC : OA$, somit eine Scalar nämlich $\frac{b}{a}\cos\varphi$. Der zweite Theil ist noch vorderhand unbekannt, enthält aber den Quotienten zweier einen rechten Winkel einschliessenden Einheitsvectoren $\frac{\delta}{\alpha}$.

21. Wie wir nun auch immer den Quotienten der einen rechten Winkel einschliessenden Einheitsvectoren definiren mögen, so muss diese Definition die Bestimmung der Ebene, welche durch beide Vectoren gelegt wird und den Sinn jener Drehung, durch welche auf die einfachste Art der Divisor aus seiner Lage in die des Dividends übergeführt wird, enthalten. Diese Ebene kann am vortheilhaftesten angegeben werden durch eine darauf errichtete Senkrechte und zwar im Punkte O, dem gemeinsamen Ursprunge beider Vectoren selbst. Tragen wir auf dieser Senkrechten die Längeneinheit vom Punkte O aus auf, so kann dadurch, dass wir diese Einheit nach der einen oder nach der anderen Richtung auftragen, auch der Sinn der um diese Senkrechte als Axe vorzunehmenden Drehung, durch welche der Divisor in die Lage des Dividends übergeführt wird, angegeben werden. Denken wir uns nämlich in den Divisor eine menschliche Figur so gelegt, dass ihre Füsse im Ursprunge O ruhen, und dass sie ihr Gesicht dem Dividend zukehrt, so kann auf der Senkrechten die Längeneinheit entweder zur linken oder zur rechten Hand jener Figur aufgetragen und dadurch der Sinn der Drehung bestimmt werden, indem wir festsetzen, dass jener Theil der Senkrechten, welcher zur Linken der Hand liegt, mit der Drehung vom Divisor zum Dividend gleichbezeichnet ist. Dieser so aufgetragene auf der Ebene BOA senkrecht stehende Einheitsvector ε wird Axe des rechtwinkligen

Quotienten $\frac{\delta}{\alpha}$ und auch des ursprünglichen Quotienten $OB : OA$ genannt.

Es muss besonders hervorgehoben werden, dass die Axe des Quotienten zweier einen rechten Winkel einschliessenden Einheitsvectoren vollkommen diesen Quotienten bestimmt, indem sie die Ebene desselben und den Sinn, in welchem die Richtung des Dividends von der des Divisors abweicht, unzweifelhaft angibt, während das Verhältniss der Tensoren und die Grösse des Winkels bei allen solchen Quotienten dieselben sind, nämlich 1 und 90^0.

Man kann daher mit voller Sicherheit schliessen:

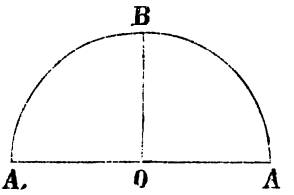
Wenn die Axe des Quotienten zweier einen rechten Winkel einschliessenden Einheitsvectoren gleich ist der Axe des Quotienten zweier anderen derartigen Vectoren, so sind diese Quotienten gleich und umgekehrt. *)

22. Der Quotient der zu einander senkrecht stehenden Einheitsvectoren kann eine Scalar nicht sein, denn sonst müssten die Vectoren parallel sein. Von welcher Art, oder Natur aber er sei, mag noch aus folgender Betrachtung ersehen werden.

Es sei ABA_1 ein Halbkreis, beschrieben mit dem Halbmesser 1, ferner sei

$$OA = \alpha, \quad OB = \beta, \quad OA_1 = -\alpha.$$

Fig. 13.



Bezeichnet man den Quotienten

$$\frac{\beta}{\alpha} = q$$

so muss auch sein

$$\frac{-\alpha}{\beta} = q.$$

Daher erhalten wir durch Multiplication links

---

*) Sind die beiden senkrecht zu einander stehenden Vectoren nicht Einheitsvectoren, sondern haben sie beliebig lange Tensoren, und wir tragen längs ihrer Axe nicht die Einheit, sondern ein Stück auf, welches zur Einheit das Verhältniss des Tensors des Dividends zu dem des Divisors hat, so nennt man nach Hamilton den so erhaltenen Vector Index der rechtwinkligen Quaternion. Offenbar enthält der Index alle Bestimmungsstücke einer solchen Quaternion, nämlich Ebene, Sinn der Drehung und Verhältniss der Tensoren und bestimmt sie daher vollkommen.

$$\frac{-\alpha}{\beta} \times \frac{\beta}{\alpha} = -1$$

rechts $q \cdot q = q^2$.

Es ist somit $q^2 = -1$ ..... (a).

Andererseits nehmen wir an, dass die Anwendung eines Einheitsvectors ε als Multiplicators auf einen anderen Vector in irgend einer solchen Operation (etwa Verschiebung oder Drehung) bestünde, die in einem gewissen und dem entgegengesetzten Sinne stattfinden könnte, so müsste die Anwendung von $-\varepsilon$ als Multiplicator in derselben Operation jedoch im entgegengesetzten Sinne bestehen. Es müssten also beide Operationen nach einander angewendet, da sie dem Betragen nach gleich, dem Sinne nach entgegengesetzt sind, sich gegenseitig neutralisiren, und das schliessliche Resultat müsste dem ursprünglichen Vector gleich sein. Also in Zeichen

$$-\varepsilon \times (+\varepsilon \times \alpha) = \alpha,$$

und wenn wir uns der Schreibweise der Algebra bedienen

$$\varepsilon^2 = -1. \ldots\ldots\ldots (b)$$

Halten wir diess mit dem Vorhergehendgn zusammen, so ergiebt sich folgendes Resultat:

> Die Anwendung eines Quotienten rechtwiklig zu einander stehender Einheitsvectoren als Multiplicators, ist aequivalent der Anwendung eines Einheitsvectors als Multiplicators, d. h. ein solcher Quotient ist von der Art oder von der Natur eines Vectors, so dass gesetzt werden kann
>
> $$\frac{\beta}{\alpha} = \varepsilon.$$

Anmerkung. Aus den beiden vorhergehenden Gleichungen (a) und (b) folgt auch, dass

$$\frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{-1} \text{ und } \varepsilon = \sqrt{-1}.$$

Daraus ersieht man, dass das Symbol $\sqrt{-1}$ in den Quaternionen vieldeutig ist, im ersten Falle wurde die Ebene der Quaternion, im andern die Richtung des Einheitsvectors gar nicht erwähnt; es gilt also $\frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{-1}$ für beliebige Ebenen und $\varepsilon = \sqrt{-1}$ für beliebige Richtung von ε.*)

*) Dass $\sqrt{-1}$ unendlich viele Werthe haben kann, folgt auch aus der gewöhnlichen Betrachtung, wie sie in algebraischen Lehrbüchern üb-

Wegen dieser Unbestimmtheit wird von dem Symbol $\sqrt{-1}$ in den Quaternionenen nur selten Gebrauch gemacht.

23. Aus dem letzten § 22 folgt, dass der Quotient rechtwinklig zu einander stehender Einheitsvectoren ein Vector ist, aus dem § 21 dagegen, dass jener Vector, den wir Axe des Quotienten genannt haben, die bestimmenden Stücke oder Merkmale dieses Quotienten präcis enthält. Es ist daher evident, dass wir berechtigt sind die Axe des Quotienten an die Stelle des Quotienten selbst zu setzen, also

$$\text{Axe von } \frac{\delta}{\alpha} = \frac{\delta}{\alpha} \text{ oder } \varepsilon = \frac{\delta}{\alpha},$$

wenn diese Axe mit ε bezeichnet wird. Wir haben nun folgende Definition:

> Der Quotient zweier einen rechten Winkel einschliessenden Einheitsvectoren ist ein dritter Einheitsvector, welcher auf der Ebene der beiden ersten senkrecht steht und zwar zur linken Hand einer durch den Divisor gelegten menschlichen Figur, deren Füsse im gemeinsamen Ursprung ruhen und deren Gesicht dem Dividend zugekehrt ist.

24. Ersetzen wir in der letzten Gleichung des § 20 $\frac{\delta}{\alpha}$ durch ε, so erhalten wir als Ausdruck einer Quaternion beliebiger Vectoren

$$\frac{OB}{OA} = \frac{b}{a}(\cos\varphi + \varepsilon \sin\varphi),$$

oder wenn der ganze Vector OB mit β und OA mit α bezeichnet wird

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{T\beta}{T\alpha}(\cos\varphi + \varepsilon \sin\varphi). \ldots\ldots\ (8)$$

Eine Quaternion besteht demnach aus zwei Addenden oder Theilen, von denen einer eine reine Scalar, der andere ein Vector

---

lich ist. Die im Mittelpunkte des Halbkreises errichtete Senkrechte OB ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen $OA = +1$ und $OA_1 = -1$, also

$$OB^2 = -1 \text{ und } OB = \sqrt{-1}.$$

Da nun durch den Durchmesser unendlich viele Ebenen gelegt und in jeder der Halbkreis und die Senkrechte auf den Durchmesser errichtet werden können, so ist jede dieser Senkrechten der $\sqrt{-1}$ gleich.

ist. Man bezeichnet den Scalar- und Vectorantheil einer Quaternion durch die vorgesetzten Buchstaben oder Symbole S und V, so dass

$$\frac{\beta}{\alpha} = S\frac{\beta}{\alpha} + V\frac{\beta}{\alpha}, \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

worin

$$\left.\begin{aligned} S\frac{\beta}{\alpha} &= \frac{OC}{OA} = \frac{T\beta}{T\alpha}\cos\varphi \\ V\frac{\beta}{\alpha} &= \frac{OB}{OA} = \frac{T\beta}{T\alpha}\sin\varphi\,.\,\varepsilon \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (10)$$

ist.

25. In besondern Fällen reducirt sich eine Quaternion auf den einen oder den andern Theil; sie degenerirt entweder zu einer reinen Scalar, oder zu einem reinen Vector. Ist nämlich der Winkel φ, den die Vectoren α und β einschliessen gleich Null oder π, so dass die Vectoren zusammenfallen oder parallel sind, so ist $\cos\varphi = \pm 1$, $\sin\varphi = 0$; wenn dagegen $\varphi = \frac{\pi}{2}$, so ist $\cos\varphi = 0$ und $\sin\varphi = 1$, so dass

$$\text{wenn } \varphi = \begin{Bmatrix} 0 \\ \pi \end{Bmatrix}, \text{ so } \frac{\beta}{\alpha} = \pm\frac{T\beta}{T\alpha} \text{ und}$$

$$\text{„ } \varphi = \frac{\pi}{2}, \text{ „ } \frac{\beta}{\alpha} = \frac{T\beta}{T\alpha}\,.\,\varepsilon,$$

$$\text{oder „ } \varphi = \begin{Bmatrix} 0 \\ \pi \end{Bmatrix}, \text{ „ } V\frac{\beta}{\alpha} = 0$$

$$\text{„ } \varphi = \frac{\pi}{2}, \text{ „ } S\frac{\beta}{\alpha} = 0,$$

welche Sätze auch umgekehrt gelten,

$$\text{wenn } S\frac{\beta}{\alpha} = 0, \text{ so } \beta \perp \alpha$$

$$\text{„ } V\frac{\beta}{\alpha} = 0, \text{ „ } \beta \parallel \alpha.$$

26. Andererseits kann eine Quaternion auch als das Product zweier Factoren angesehen werden, wovon der eine das Verhältniss der absoluten Längen des Dividends und des Divisors, der andere die Ebene, und den Winkel der Quaternion angibt. Der erste Factor wird Tensor und der andere der Versor der Quaternion genannt. Zur Bezeichnung dieser beiden Factoren bedient man sich derselben Zeichen, die auch bei den Vectoren angewendet werden, nämlich wenn wir die Quaternion mit q bezeichnen

$$\left.\begin{aligned} Tq &= T\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = \frac{T\beta}{T\alpha} \text{ und} \\ Uq &= U\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = \cos\varphi + \varepsilon \sin\varphi. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (11)$$

Indem man diese noch mit den Zeichen S und V verbindet, erhält man zwischen diesen Zeichen gewisse Beziehungen:

$$SUq = \cos\varphi \ldots\ldots\ldots (12); \quad VUq = \varepsilon \sin\varphi$$

und $$TVUq = \sin\varphi \ldots\ldots\ldots (13).$$

Die Gleichungen (12) und (13) zeigen den Zusammenhang der trigonometrischen Functionen $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ mit den Quaternionen. Ferner ergiebt sich aus ihnen

$$(SUq)^2 + (TVUq)^2 = 1$$

und durch Multiplication mit $(Tq)^2$

$$[(SUq)\,(Tq)]^2 + [(TVUq)\,(Tq)]^2 = (Tq)^2$$

oder

$$(Sq)^2 + (TVq)^2 = (Tq)^2 \ldots\ldots\ldots (14).$$

$(Tq)^2$ wird auch Norm der Quaternion genannt und mit dem Symbol N bezeichnet. so dass

$$Nq = (Tq)^2 \ldots\ldots\ldots (15).$$

Die Norm einer Quaternion ist also eine Scalargrösse.

27. Der Vectorantheil einer Quaternion kann als Vector in drei auf einander senkrechte Vectoren zerlegt werden. Bezeichnen wir die Einheitsvectoren nach diesen Richtungen mit i, j, k, so hat ε im Allgemeinen nach jeder Richtung einen Antheil oder eine Componente und nimmt die Form an

$$q = \frac{\beta}{\alpha} = a + bi + cj + dk, \ldots\ldots\ldots (16)$$

worin a den Scalartheil der Quaternion, b, c, d die Masszahlen der entsprechenden Componenten von $V\frac{\beta}{\alpha}$ also ebenfalls Scalaren bedeuten. Da i, j, k Einheitsvectoren verschiedener Richtung sind, so sind sie anzusehen als Einheiten verschiedener Art, deren eine in die andere nicht übergeführt werden kann. Ist eine andere Quaternion

$$q_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k$$

und ist $q = q_1$ so entspricht eine solche Gleichung vier numerischen Gleichungen

$$a = a_1; \quad b = b_1; \quad c = c_1; \quad d = d_1 \ldots\ldots\ldots (17)$$

Diess ist ein weiterer Grund das Verhältniss $\frac{\beta}{\alpha}$ eine Quaternion

zu nennen. (Vergl. auch § 16 und § 19).

28. Vertauscht man in einer Quaternion $q = \frac{\beta}{\alpha}$ den Dividend mit dem Divisor, so nennt man die daraus hervorgehende Quaternion

$$q_1 = \frac{\alpha}{\beta}$$

reciprok zu der ersten. Der Winkel der reciproken Quaternion ist dem der ursprünglichen gleich, die Axen sind aber entgegengesetzt; es ist daher

$$q_1 = \frac{T\alpha}{T\beta}(\cos\varphi - \varepsilon \sin\varphi)$$

und da $$1 : \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha} : \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha}{\beta}$$

somit $$1 : q = q_1, \qquad \text{so ist}$$

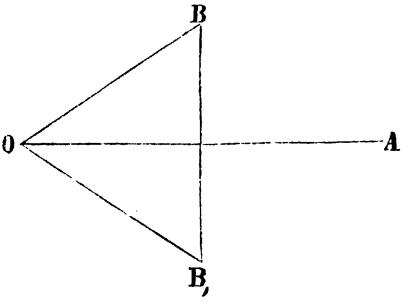
$$\frac{1}{q} = \frac{T\alpha}{T\beta}(\cos\varphi - \varepsilon \sin\varphi) \ldots\ldots\ldots (18)$$

29. Stimmen zwei Quaternionen in ihren Ebenen überein, ist auch das Verhältniss der absoluten Längen des Dividends und Divisors der einen dem der anderen gleich, weicht ferner bei beiden der Divisor vom Dividend um denselben Winkel jedoch im entgegengesetzten Sinne ab, so nennt man die beiden Quaternionen in Bezug aufeinander conjugirt; wird die eine mit q bezeichnet, so bezeichnet man die andere mit Kq.

$$\text{Ist } \frac{OB}{OA} = q, \quad \text{so ist } \frac{OB_1}{OA} = K\frac{OB}{OA} = Kq.$$

Offenbar unterscheiden sich diese beiden Quaternionen nur durch das Zeichen der Axe ε. Bei $\frac{OB'}{OA}$ liegt die Axe unterhalb der Ebene des Papiers, bei $\frac{OB}{OA}$ oberhalb derselben.

Fig. 14.



Ist also

$$q = \frac{T\beta}{T\alpha}(\cos\varphi + \varepsilon \sin\varphi)$$

so ist $$Kq = \frac{T\beta}{T\alpha}(\cos\varphi - \varepsilon \sin\varphi) \ldots\ldots\ldots (19)$$

oder da $$q = Sq + Vq$$
so $$Kq = Sq - Vq \ldots\ldots\ldots (20)$$
Ferner hat man, da
$$Sq = SKq, \quad TVq = TVKq$$
$$(Sq)^2 + (TVq)^2 = (SKq)^2 + (TVKq)^2 \text{ nach Formel (14)}$$
$$Tq = TKq$$
und schliesslich
$$Tq\, TKq = (Tq)^2 = Nq \ldots\ldots\ldots (21).$$
Es ist also die Norm einer Quaternion auch das Product aus dem Tensor derselben und dem Tensor ihrer conjugirten.

Dritter Abschnitt.

Addition und Subtraction der Quaternionen.

30. Um die Addition und Subtraction mehrerer Quaternionen auszuführen, wird man die Summe der Scalaren und Vectoren bilden. Da nun die Summe der Scalaren wieder eine Scalar und die Summe der Vectoren, die nach den Regeln der Zusammensetzung von Vectoren gebildet sein muss, wieder ein Vector ist, so besteht die Summe oder die Differenz der Quaternionen aus einer Scalar und einem Vector und ist daher selbst wieder eine Quaternion.

Die Summirung der Scalaren ist eine associative und commutative Operation, dasselbe wurde von der Summirung der Vectoren in § 10 gezeigt; also ist die Addition auch der Quaternionen eine associative und commutative Operation. Sind

$$\begin{aligned} q &= Sq + Vq \\ q_{,} &= Sq_{,} + Vq_{,} \\ q_{,,} &= Sq_{,,} + Vq_{,,} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

zu addiren, und bezeichnet man die linke Summe die eine Quaternion ist mit $Q = SQ + VQ$, so ist

$$SQ = S(q + q_{,} + q_{,,} + \ldots)$$
$$VQ = V(q + q_{,} + q_{,,} + \ldots);$$

andererseits ist aber auch

$$\left.\begin{aligned} SQ &= Sq + Sq_{,} + Sq_{,,} + \ldots \\ VQ &= Vq + Vq_{,} + Vq_{,,} + \ldots \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (24)$$

Es ist also die Operation die man mit den Zeichen S, V anzeigt und mit „Scalar — Vector — nehmen“ benennt, eine distributive Operation.

31. Bezeichnet man mit q und $q_{,}$ zwei conjugirte Quaternionen, so dass

$$q = Sq + Vq$$
$$Kq = Sq - Vq,$$

so ist die Summe $q + Kq = 2Sq$ ..... (25)
und der Unterschied
$$q - Kq = 2Vq. \ldots\ldots\ldots (26)$$

32. Sind die zu addirenden oder zu subtrahirenden Quaternionen in Form von Quadrinomen gegeben, so wird die Addition oder Subtraction ausgeführt, indem man die Einheiten jeder Art in eine Summe oder eine Differenz vereinigt. Sind

$$q_{,} = a_{,} + b_{,}i + c_{,}j + d_{,}k$$
$$q_{,,} = a_{,,} + b_{,,}i + c_{,,}j + d_{,,}k$$
$$q_{,,,} = a_{,,,} + b_{,,,}i + c_{,,,}j + d_{,,,}k$$

So ist

$$\left.\begin{aligned} &q_{,} + q_{,,} + \ldots = \\ &(a_{,} + a_{,,} + \ldots) + (b_{,} + b_{,,} + \ldots)i + \\ &(c_{,} + c_{,,} + \ldots)j + (d_{,} + d_{,,} + \ldots)k \\ &q_{,} - q_{,,} = \\ &(a_{,} - a_{,,}) + (b_{,} - b_{,,})i + (c_{,} - c_{,,})j + (d_{,} - d_{,,})k. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (27)$$

Vierter Abschnitt.

Multiplication der Vectoren.

33. In der Einleitung wurde bemerkt, dass wir einen Zahlenausdruck für eine Grösse gewinnen, indem wir sie durch ein Mass messen. In diesem Processe der Messung sind zwei Operationen mit einander verbunden: die Anwendung des Masses auf die zu messende Grösse, durch welche diese Grösse erschöpft wird, und die Anwendung der Zahl auf das Mass, durch welche die zu messende Grösse wieder erzeugt wird. *)

Ebenso wie wir die Zahl auf das Mass anwenden, um die ursprüngliche Grösse zu erzeugen, können wir aber auch die Zahl auf eine andere Grösse (oder Zahl) anwenden und werden dadurch eine neue Grösse (Zahl) erhalten, die wir Product nennen. Die angewendete Zahl heisst Multiplicator und die Grösse, auf welche die Zahl angewendet wird, heisst Multiplicand und diese Operation Multiplication.

34. Es ist leicht zu zeigen, dass diese Erklärung der Multiplication auf alle Arten von Zahlen passt

a) $8 \times 3 = ?$ Der Multiplicator 3 wurde gewonnen, indem man fand, dass ein gewisses Mass in einer gewissen Grösse dreimal enthalten ist; diese gewisse Grösse wird also durch dreimaliges Setzen des Masses erzeugt. Setzen wir nun dreimal statt des Masses die Zahl 8 so erhalten wir das Product $8 \times 3 = 8 + 8 + 8 = 24$.

b) $8 \times {}^3/_4 = ?$ Der Multiplicator wurde gewonnen, indem eine gewisse Grösse durch ein Mass gemessen werden sollte. Um diese Messung ausführen zu können, musste man das Mass in

*) Wenn wir mit einem Liter die Menge einer Flüssigkeit messen, so nehmen wir mit dem Litergefässe die Flüssigkeit heraus und wiederholen es bis die Flüssigkeit erschöpft ist; dadurch gewinnen wir die Zahl. Wenn wir das Liter jedesmal in ein Gefäss entleeren, so ensteht in dem neuen Gefässe die ursprüngliche Flüssigkeitsmenge.

Um für die Entfernung AB eine Zahl zu finden, tragen wir das Mass von A gegen B auf, bis die Entfernung AB erschöpft wird; so wie aber das Mass auf AB forschreitet, entsteht hinter ihm dieselbe Entfernung.

4 Theile theilen, und fand, dass dieser 4. Theil des Masses darin dreimal enthalten war. Die zu messende Grösse wurde also durch das dreimalige Setzen des vierten Theiles des Masses erzeugt. Wir haben nun das Mass durch 8 zu ersetzen.

Es ist also $8 \times {}^3/_4 = {}^8/_4 + {}^8/_4 + {}^8/_4 = 2 + 2 + 2 = 6$.

c) $8 \times (-3) = ?$ Um die Zahl -3 zu erhalten, musste ein gewisses Mass umgekehrt oder entgegengesetzt angewendet werden. Durch das dreimalige Setzen desselben entstand dann die zu messende Grösse. Wir haben also auch hier das entgegengesetzte von 8 d. i -8 dreimal zu setzen.

Es ist somit $8 \times (-3) = (-8) + (-8) + (-8) = -24$.

d) $8i \times 3i = ?$ Der Multiplicator $3i$ war entstanden, indem behufs der Messung einer Grösse das Mass aus seiner Lage um einen rechten Winkel gedreht worden sein musste, um durch dreimaliges Setzen desselben diese Grösse zu erzeugen. Der Multiplicand $8i$ ist nun bereits um einen rechten Winkel aus der Richtung der positiven Zahlen gedreht und soll nochmals um denselben Betrag gedreht werden; er wird also in die Lage der negativen Zahlen kommen und nun -8 sein.

Es ist daher $8i \times 3i = -8 - 8 - 8 = -24$ u. s. f.

35. In der Algebra sind wir gewohnt, auf die Unterscheidung des Multiplicators und Multiplicands kein grosses Gewicht zu legen, weil Multiplicator und Multiplicand mit einander vertauscht werden können, ohne dass das Product ein anderes würde. In der Algebra ist daher die Multiplication eine commutative Operation und desswegen werden Multiplicand und Multiplicator mit dem gemeinsamen Namen Factoren benannt. Diess ist im Allgemeinen bei den Quaternionen nicht der Fall. Um dieses auch schon äusserlich anzudeuten, wollen wir den Multiplicator stets voraus schreiben. Aus der Vertauschbarkeit der Factoren in der Algebra ergibt sich ferner, dass die Division, mag man sie als eine Messung oder Theilung auffassen (jenachdem man den Multiplicator oder Multiplicand sucht) zu demselben Resultat führt. Hier haben wir bisher die Division nur als eine Messung angesehen. In der Algebra sind die beiden Gleichungen

$$\left(\frac{a}{b}\right) b = a \text{ und } b\left(\frac{a}{b}\right) = a$$

selbstverständlich; in den Quaternionen ist, wenn wir den ersten

Factor als Multiplicator ansehen, nur die erste Gleichung im Allmeinen richtig.*)

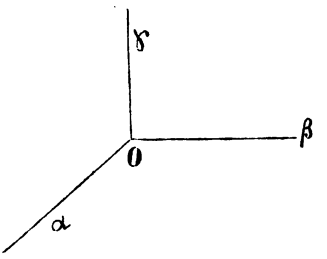
In der Algebra wird eine Summe multiplicirt, wenn man jeden Addenden multiplicirt und dann die Producte addirt; man bezeichnet diess als das distributive Gesetz der Multiplication. Ebenso ist das associative Gesetz der Multiplication in der Algebra giltig, d. h. ein Product mehrerer Factoren wird gebildet, indem man sie zu beliebigen Gruppen vereinigt (ohne ihre Stellung zu verändern) und die Gruppenproducte multiplicirt.

Das distributive Gesetz haben wir bei der Bildung des Quotienten zweier Vectoren (in § 20) angenommen, ebenso das associative (in § 22); daher können wir erwarten, dass diese Gesetze auch bei der Multiplication der Vectoren und Quaternionen ihre Geltung beibehalten werden.

36. Bezeichnen α und β zwei zu einander senkrechte Einheitsvectoren und errichtet man einen dritten Einheitsvector γ, der zu beiden also auch zu ihrer gemeinsamen Ebene senkrecht steht und zwar zur linken Hand einer in α gelegten und gegen β gekehrten menschlichen Figur, so ist

$$\alpha\beta = \gamma. \ldots\ldots\ldots (28)$$

Fig. 15.



Denn α kann dargestellt werden als der Quotient $\frac{\gamma}{\beta}$; daher ist

$$\alpha . \beta = \frac{\gamma}{\beta} . \beta = \gamma.$$

Die Anwendung des Einheitsvectors α als Multiplicators auf einen anderen darauf senkrechten Einheitsvector besteht demnach in einer Drehung des Multiplicands um den Multiplicator als Axe durch einen Winkel von 90^0 oder $\frac{\pi}{2}$.**)

*) Die erste Gleichung bedeutet die Anwendung der bei der Messung gefundenen Zahl auf das Mass selbst, die zweite würde die Vertauschbarkeit der Factoren, die eben noch fraglich ist, zur Voraussetzung haben.

**) Es ist bemerkenswert, dass ein Einheitsvector, sowol als Divi-

Daher heisst auch der Einheitsvector ein Versor. Die zweifache Anwendung von α auf β bringt β in die entgegengesetzte Lage, oder

$$\alpha \,.\, \alpha\beta = -\beta.$$

Indem wir nun das associative Gesetz annehmen, ist

$$\alpha^2 \,.\, \beta = -\beta, \text{ oder } \alpha^2 = -1. \ldots\ldots\ldots (29)$$

Somit ist das Quadrat eines Einheitsvectors oder das Product zweier paralleler Einheitsvectoren von derselben Richtung gleich der negativen Einheit.

Um β mit $-\alpha$ zu multipliciren müssen wir β um die entgegengesetzte Axe oder im entgegengesetzten Sinne drehen; man erhält

$$(-\alpha) \,.\, \beta = -\gamma.$$

Durch die aufeinanderfolgende Anwendung von $+\alpha$ und $-\alpha$, oder $-\alpha$ und $+\alpha$ bleibt der Multiplicand β in seiner Lage, also

$$-\alpha \,.\, (+\alpha \,.\, \beta) = +\alpha \,.\, (-\alpha \,.\, \beta) = \beta;$$

daraus folgt, dass $-\alpha$ und $+\alpha$ commutativ sind. Diess ist mit beliebigen Vectoren nicht der Fall. Wird α mit β multiplicirt, so müssen wir nach der Definition α um die Axe β durch einen rechten Winkel (links um) drehen und erhalten $-\gamma$; es ist somit

$$\beta \,.\, \alpha = -\gamma. \ldots\ldots\ldots (30)$$

Die Multiplication ist also im Allgemeinen keine commutative Operation.

37. Ist ein Einheitsvector β mit einer Zahl m zu multipliciren, so heisst diess man solle ihn m-mal in seiner Richtung auftragen oder im Verhältniss $m:1$ strecken. Hat man dann den so gestreckten Vector noch mit α einem Einheitsvector, der mit β einen rechten Winkel einschliesst, zu multipliciren so bedeutet diess, dass man den gestreckten Vector $m\beta$ noch durch einen rechten Winkel um die Axe α zu drehen habe. Offenbar würde man dasselbe Resultat erzielen, wenn man erst die Drehung und dann die Streckung vornehmen würde. Oder in Zeichen

$$\alpha \,.\, m\beta = m\alpha\beta$$

daraus folgt

$$\alpha m = m\alpha \ldots\ldots\ldots (31)$$

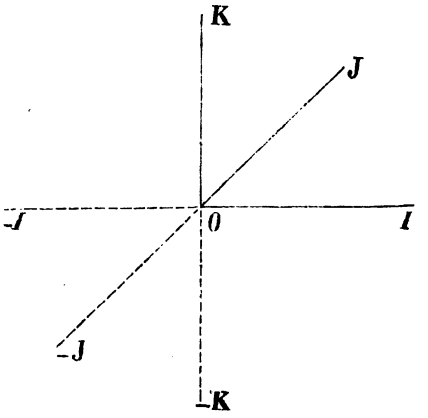
oder die Multiplication eines Vectors mit einer Scalar ist commutativ.

---

sor als auch als Multiplicator auf einen anderen mit ihm einen rechten Winkel einschliessenden Einheitsvector angewendet, dasselbe Resultat liefert: $\frac{\beta}{\alpha} = \gamma$.

38. Es seien nun drei senkrecht aufeinander stehende Gerade (Axen) errichtet und auf denselben die Einheitsvectoren vom gemeinsamen Ursprung aufgetragen und zwar j horizontal nach hinten, i horizontal nach rechts und k vertical nach oben, die negativen dagegen nach den entgegengesetzten Richtungen; so ist

Fig. 16.



$$ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j$$

ferner

$$ji = -k, \quad kj = -i, \quad ik = -j.$$

da nun $i^2 = -1, \quad j^2 = -1, \quad k^2 = -1,$

so ist

$$(ij).k = k.k = k^2 = -1$$
$$(jk).i = i.i = i^2 = -1$$
$$(ki).j = j.j = j^2 = -1,$$

und ebenso

$$i(jk) = i.i = i^2 = -1$$
$$j(ki) = j.j = j^2 = -1$$
$$k(ij) = k.k = k^2 = -1.$$

Daraus folgt

$$(ij)k = i(jk), \quad (jk)i = j(ki) \text{ u. s. w.}$$

so dass also die Multiplication rechtwinkliger Vectoren eine associative Operation ist. Demnach können die Klammern als überflüssig weggelassen werden; also

$$\left.\begin{aligned} ijk = jki = kij = -1 \\ jik = kji = ikj = +1. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (32)$$

Alle diese Gleichungen lassen sich ableiten aus der Formel

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1, \ldots\ldots\ldots (33)$$

sie lassen sich auch leicht merken, wenn man sich erinnert, dass, während das Quadrat eines jeden dieser drei Vectoren gleich der negativen Einheit ist, das Product je zweier derselben entweder gleich ist dem dritten selbst, oder demselben mit entgegengesetztem Zeichen, je nachdem der Multiplicator dem Multiplicand in der cyklischen Aufeinanderfolge

$$i, j, k, i, j \ldots$$

vorangeht oder folgt.

39. In der analytischen Geometrie der Ebene wird stets die Axe der x vom Anfangspunkt nach rechts, die Axe der y nach hinten gezogen und die Drehung der positiven Axe Ox gegen Oy also die dem Uhrzeiger entgegengesetzte Drehung als positiv angesehen. Uebereinstimmend damit haben wir die Axe einer Quaternion zur linken Hand (einer in den Divisor gelegten gegen den Dividend gekehrten menschlichen Figur) aufgetragen, weil ein Beobachter von Seite dieser Axe die Drehung als im entgegengesetzten Sinne des Uhrzeigers vor sich gehend wahrnimmt. Es ist dies auch die Drehung der Erde um ihre Axe und um die Sonne in der Erdbahn, wie sie einem Beobachter in unserer (nördlichen) Breite erscheint. Uebergeht man nun zum räumlichen Coordinatensystem, so ist es wol am einfachsten, dass im Anfangspunkt die Axe der z vertical aufwärts errichtet, und die Axe der y belassen werde; dann ist wieder die Drehung der Oy gegen Oz und der Axe Oz gegen Ox positiv, und sie erscheint, von der dritten positiven Halbaxe gesehen, abermals entgegengesetzt dem Uhrzeiger.

Indess werden die räumlichen Coordinaten häufig auch so gezeichnet, dass die Axe der x horizontal nach rechts, die der y horizontal nach vorn (also entgegengesetzt der Zeichnung in der Ebene) und die Axe der z vertical nach oben gezogen wird. Dann ist es geboten die Drehung der positiven Halbaxe der x gegen jene der y, die der y gegen jene der z und endlich die der z gegen jene der x als positiv anzusehen. Diese Drehungen erscheinen aber einem Beobachter, von der dritten positiven Axe aus gesehen, als im Sinne des Uhrzeigers vor sich gehend.

Die vorstehenden Beziehungen zwischen den Versoren i, j, k bleiben auch bei dieser Zeichnung der Axen in Kraft, wenn man sie in der Richtung mit Ox, Oy, Oz bezüglich zusammenfallen lässt, wenn man sich nur die Axe der Quaternion zur rechten Hand aufgetragen, und demnach bei der Multiplication den Multiplicand um den Multiplicator sich rechtsum drehend vorstellt. In der That ist dann (Fig. 17)

$$\frac{k}{j} = i, \quad \frac{i}{k} = j, \quad \frac{j}{i} = k, \quad \text{und}$$
$$i = jk, \quad jk = i, \quad ki = j.$$

40. Schliessen zwei Einheitsvectoren α, β einen beliebigen Winkel φ ein, so dass ihr Quotient

$$\frac{\beta}{\alpha} = \cos\varphi + \varepsilon \sin\varphi,$$

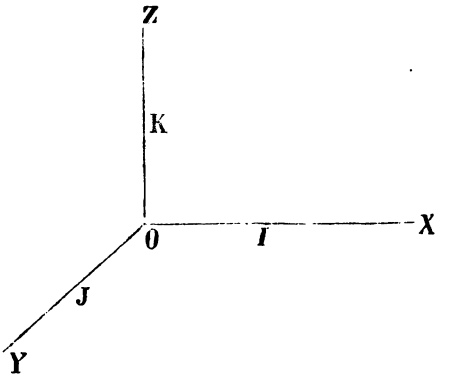
so folgt nach der Definition

$$\frac{\beta}{\alpha}.\alpha =$$

$$(\cos\varphi + \varepsilon \sin\varphi)\,\alpha = \beta.$$

Daraus ersieht man wieder, dass die Anwendung des Quotienten $\frac{\beta}{\alpha}$ oder des Ausdruckes $\cos\varphi + \varepsilon \sin\varphi$ als Multiplicators auf den Vector α in einer Drehung besteht, indem α aus seiner Lage in die Lage β überführt wird. Die Axe dieser Drehung ist ε, ein Vector, der auf α und β senkrecht steht, ihr Betrag ist der Winkel φ. Es ist desswegen die Benennung des Ausdruckes $\cos\varphi + \varepsilon \sin\varphi$ als eines Versors gerechtfertigt.

Fig. 17.

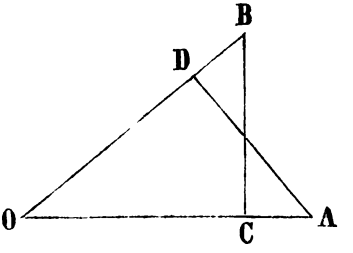


Sind in der Fig. 18 $OA = \alpha$, $OB = \beta$ die Einheitsvectoren und ist ε ein Einheitsvector, der auf beiden aufwärts senkrecht errichtet ist, so ist $OC = \alpha \cos\varphi$; und $CB = \varepsilon\alpha \sin\varphi$, demnach

$$\beta = \alpha \cos\varphi + \varepsilon\alpha \sin\varphi$$

vergleichen wir diess mit dem obigen Werthe von β, so ersehen wir, dass mit einer Summe, die aus einer Scalar und einem Vector besteht, multiplicirt wird, wenn man den Multiplicand mit jedem Gliede multiplicirt und dann die Producte in eine Summe vereinigt. Die Multiplication ist also eine distributive Operation. Zerlegen wir auch den Vector α in die beiden Vectoren $OD = \beta \cos\varphi$ und $DA = -\varepsilon\beta \sin\varphi$, so ist

Fig. 18.



$$\beta \cos\varphi - \varepsilon\beta \sin\varphi = \alpha$$

wenden wir die beiden Theile dieser Gleichung als Multiplicatoren auf die beiden Theile der letzten Identität an, so erhalten wir

$$(\beta \cos\varphi - \varepsilon\beta \sin\varphi)\ \beta = \alpha\ (\alpha \cos\varphi + \varepsilon\alpha \sin\varphi);$$

auf der linken Seite kann die Multiplication nach dem soeben bewiesenen distributiven Gesetze vorgenommen werden, man bekommt

$$\beta^2 \cos\varphi - \varepsilon\beta^2 \sin\varphi \text{ oder } -\cos\varphi + \varepsilon \sin\varphi;$$

dasselbe erhält man aber auch, wenn man auf der rechten Seite Glied für Glied multiplicirt, nämlich

$$\alpha^2 \cos\varphi + \alpha \,.\, \varepsilon\alpha \sin\varphi \text{ oder } \alpha^2 \cos\varphi + \alpha(-\alpha\varepsilon \sin\varphi),$$

welches ebenfalls gibt $-\cos\varphi + \varepsilon \sin\varphi$.

Daraus ersieht man, dass die Multiplication auch bezüglich des Multiplicands distributiv ist, ferner dass

$$\alpha\beta = -\cos\varphi + \varepsilon \sin\varphi. \ldots\ldots\ldots (34)$$

Das Product zweier Einheitsvectoren die einen Winkel φ einschliessen ist somit eine Quaternion, deren Scalar der negative Cosinus des Winkels ist und deren Vectorantheil den Sinus desselben Winkels zum Tensor hat.

Wird der Multiplicator mit dem Multiplicand vertauscht, so ist der Winkel φ mit entgegengesetztem Zeichen zu nehmen, wodurch $\sin\varphi$ das negative Zeichen erhält, so dass

$$\beta\alpha = -\cos\varphi - \varepsilon \sin\varphi, \ldots\ldots\ldots (35)$$

wovon man sich auch überzeugt, wenn man auf die beiden Theile der Gleichung

$$\alpha = \beta \cos\varphi - \varepsilon\beta \sin\varphi$$

β als Multiplicator anwendet. Die Multiplication der den Winkel φ einschliessenden Einheitsvectoren ist also nicht commutativ; vielmehr sind die Producte conjugirte Quaternionen.

41. Sind die Factoren α, β nicht Einheitsvectoren, so lassen sie sich darstellen als $T\alpha \,.\, U\alpha$ und $T\beta \,.\, U\beta$, worin $U\alpha$ und $U\beta$ solche sind. Es ist also

$$\alpha\beta = T\alpha \,.\, U\alpha \,.\, T\beta \,.\, U\beta$$

und da Scalaren mit Vectoren commutativ sind (§ 27), so ist

$$\alpha\beta = T\alpha\, T\beta \times U\alpha \,.\, U\beta.$$

Schliessen nun α und β einen rechten Winkel ein, so ist $U\alpha \,.\, U\beta$ ein neuer Vector ε, der auf beiden senkrecht steht, somit

$$\alpha\beta = T\alpha \,.\, T\beta \,.\, \varepsilon \ldots\ldots\ldots (36)$$

oder in Worten: das Product zweier senkrecht zu einander stehenden Vectoren von beliebiger Länge ist ein neuer auf beiden senkrechter Vector, der die Anzahl der Flächeneinheiten des aus beiden Factoren gebildeten Rechteckes zum Tensor hat.

Schliessen α, β den Winkel φ ein, so ist

$$\alpha\beta = T\alpha \,.\, T\beta \,.\, U\alpha \,.\, U\beta = T\alpha\, T\beta(-\cos\varphi + \varepsilon \sin\varphi)$$

oder

$$\alpha\beta = S\alpha\beta + V\alpha\beta,$$

worin

$$S\alpha\beta = -T\alpha\, T\beta \cos\varphi,\quad V\alpha\beta = T\alpha\, T\beta \sin\varphi \,.\, \varepsilon \ldots\ldots\ldots (37)$$

oder in Worten: der Tensor des Vectors eines Productes zweier Vectoren ist die Fläche des aus den Factoren gebildeten Parallelogramms.

Ist ferner $\beta = \alpha$, somit $\varphi = 0$, so ist

$$\alpha^2 = T\alpha \,.\, T\alpha \,.\, U\alpha \,.\, U\alpha = (T\alpha)^2\,(U\alpha)^2$$

oder

$$\alpha^2 = -(T\alpha)^2 \ldots\ldots\ldots (38)$$

42. Aus dem Vorhergehenden ergeben sich einige häufig vorkommende Formeln und Sätze:

1. $S\alpha\beta = S\beta\alpha$. . . . . (39)
2. $V\alpha\beta = -V\beta\alpha$. . . . . (40)
3. $\alpha\beta + \beta\alpha = 2S\alpha\beta$. . . . . (41)
4. $\alpha\beta - \beta\alpha = 2V\alpha\beta$. . . . . (42)
5. $(\alpha+\beta)^2 = (\alpha+\beta)(\alpha+\beta)$
   $= \alpha^2 + \alpha\beta + \beta\alpha + \beta^2$
   $= \alpha^2 + 2S\alpha + \beta^2$. . . . . (43)
6. $(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 - 2S\alpha\beta + \beta^2$. . . . . (44)
7. $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = \alpha^2 - 2V\alpha\beta - \beta^2$. . . . . (45)
8. Wenn α und β einen rechten Winkel einschliessen, $S\alpha\beta = 0$ und umgekehrt. . . . . (46)
9. $V\alpha\beta$ ist ein Vector, der auf der durch $\alpha\,\beta$ gelegten Ebene senkrecht ist. . . . . (47)
10. $\alpha^2\beta^2 = \alpha\alpha\beta^2 = \alpha\beta^2\alpha$ weil β^2 eine Scalar ist; daher
    $= (\alpha\beta)(\beta\alpha) = (S\alpha\beta + V\alpha\beta)(S\alpha\beta - V\alpha\beta)$
    $= (S\alpha\beta)^2 - (V\alpha\beta)^2$. . . . . (48)

wobei $\alpha^2\beta^2$ nicht zu verwechseln ist mit $(\alpha\beta)^2$.

43. Wir wollen nun zeigen, dass jeder Versor dargestellt werden kann als eine Potenz eines Einheitsvectors.

Sei zu dem Zwecke α ein beliebiger Vector in der Ebene des Papiers (etwa), ε ein Einheitsvector senkrecht auf die Ebene des Papiers, so ist $\varepsilon\alpha = \beta$ ein Vector, der in der Ebene des Papiers auf α senkrecht steht und dieselbe Länge wie α besitzt. Die Anwendung des Vectors ε auf α besteht also in einer Drehung des Vectors α und zwar im Betrage eines rechten Winkels.

Die zweimalige Anwendung von ε auf α gibt $-\alpha$; es ist also $\varepsilon^2 = -1$. Dreht man nochmals um einen rechten Winkel in demselben Sinne, so hat man mit ε^3 multiplicirt und es ist $\varepsilon^3\alpha = -\beta = -\varepsilon\alpha$, somit $\varepsilon^3 = -\varepsilon$ und endlich $\varepsilon^4\alpha = \alpha$ oder $\varepsilon^4 = +1$.

Wir haben also:

$$\varepsilon^0 = 1;\ \varepsilon^1 = \varepsilon;\ \varepsilon^2 = -1:\ \varepsilon^3 = -\varepsilon;\ \varepsilon^4 = +1, \ldots\ldots\ldots (49)$$

und man sieht, dass man auf diese Art fortschreiten kann. Daher ergibt sich von selbst die Definition, ε^m ist, wofern m eine ganze positive Zahl bedeutet, der Versor, welcher einen darauf senkrechten Vector im positiven Sinne (linksum) um m rechte Winkel dreht. Ist m negativ, so entspricht diess einer Drehung im negativen Sinne.

Demgemäss ist also ε^{-1} ein Operator, der den Multiplicand im negativen Sinne dreht, seine Anwendung ist gleichbedeutend mit der Anwendung von $-\varepsilon$ als Multiplicator, so dass $\varepsilon^{-1} = \frac{1}{\varepsilon} = -\varepsilon$, woraus wie früher folgt $\varepsilon^2 = -1$. Es ist dabei nur zu beachten, dass nicht etwa wie in der Algebra $\frac{\alpha}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}.\alpha$ sondern $\frac{\alpha}{\varepsilon} = \alpha.\frac{1}{\varepsilon}$ ist.

Ganz analog ist nun auch ε^m zu definiren, wenn m eine gebrochene Zahl ist, nämlich als ein Operator, der den Multiplicand um ε als Axe um einen Winkel φ dreht, der in einem solchen Verhältnisse zu einem rechten Winkel steht, wie der Zähler des Bruches zum Nenner, so dass $m = \frac{\varphi}{\frac{\pi}{2}}$ oder $m = \frac{2\varphi}{\pi}$.

Nun haben wir aber gesehen, dass ein solcher Versor dargestellt wird durch $\cos\varphi + \varepsilon\sin\varphi$, wir haben daher

$$\varepsilon^{\frac{2\varphi}{\pi}} = \cos\varphi + \varepsilon\sin\varphi$$

ebenso hat man für einen anderen Winkel φ'

$$\varepsilon^{\frac{2\varphi'}{\pi}} = \cos\varphi' + \varepsilon\sin\varphi'.$$

Durch Multiplication der rechten Theile der Gleichungen erhält man

$$(\cos\varphi + \varepsilon\sin\varphi)(\cos\varphi' + \varepsilon\sin\varphi') = \cos(\varphi+\varphi') + \varepsilon\sin(\varphi+\varphi'),$$

was nun ein neuer Versor ist; so dass

$$\varepsilon^{\frac{2\varphi}{\pi}}\,\varepsilon^{\frac{2\varphi'}{\pi}} = \varepsilon^{\frac{2(\varphi+\varphi')}{\pi}} \ldots\ldots\ldots (50)$$

Die Gleichung

$$\varepsilon^{\frac{2(\varphi+\varphi'+\ldots)}{\pi}} = \cos(\varphi+\varphi'+\ldots) + \varepsilon \sin(\varphi+\varphi'+\ldots) \quad (51)$$

zeigt, dass die Resultate von Demoivres Theorem auf den Ausdruck $\cos\varphi + \varepsilon \sin\varphi$ anwendbar sind.

Andererseits folgt aus dem Vorhergehenden, dass irgend eine Quaternion dargestellt werden kann als die Potenz eines Vectors, wenn man nämlich den Tensor und Versor des Vectors so wählt, dass sie zu der betreffenden Potenz erhoben dem Tensor und Versor der Quaternion gleich werden.

Fünfter Abschnitt.

Multiplication der Quaternionen.

44. Nachdem im Vorhergehenden nachgewiesen ist, dass die Multiplication der Vectoren sowol bezüglich des Multiplicators als auch bezüglich des Multiplicands eine distributive Operation ist, können wir nun die Multiplication beliebiger Quaternionen vornehmen.

Es seien zunächst q und q' reciproke Quaternionen, so ist

$$q = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{T\beta}{T\alpha}(\cos\varphi + \varepsilon \sin\varphi)$$

und

$$q' = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{T\alpha}{T\beta}(\cos\varphi - \varepsilon \sin\varphi)$$

so ist

$$q\,q' = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$$

daraus folgt $q' = \frac{1}{q} = q^{-1}$ und ferner, dass q mit $\frac{1}{q}$ commutativ sind.

Es seien ferner q und Kq conjugirte Quaternionen nämlich

$$q = Sq + Vq$$
$$Kq = Sq - Vq$$

so ist

$$q \,.\, K = (Sq)^2 - (Vq)^2 = (Sq)^2 + (TVq)^2 = Nq$$

ebenso findet man

$$Kq \,.\, q = Nq, \ldots\ldots\ (52)$$

es ist also die Norm einer Quaternion auch das Product aus der Quaternion und ihrer conjugirten; daraus ergibt sich, dass q und Kq commutativ sind.

Sind endlich p und q beliebige Quaternionen

$$p = Sp + Vp$$
$$q = Sq + Vq$$

so ist ihr Product

$$r = pq = Sp\,Sq + Sp\,Vq + Sq\,Vp + Vp\,Vq;$$

das letzte Glied ist als Product zweier Vectoren eine Quaternion und besteht aus einem Scalar- und Vectortheil, nämlich aus $S(Vp\,Vq)$ und $V(Vp\,Vq)$, worin wir die Klammern durch einen einfachen hinter S und V gesetzten Punkt ersetzen können. Es ist daher

$$r = Sp\,Sq + S\,.\,Vp\,Vq + Sp\,Vq + Sq\,Vp + V\,.\,Vp\,Vq. \ldots\ldots\ (53)$$

Das Product zweier somit auch beliebig vieler Quaternionen ist abermals eine Quaternion; daher

$$pq = Spq + Vpq$$
$$Spq = Sp\,Sq + S\,.\,Vp\,Vq \ldots\ldots\ (54)$$
$$Vpq = Sp\,Vq + Sq\,Vp + V\,.\,Vp\,Vq \ldots\ (55)$$

45. Die zu dieser conjugirte Quaternion unterscheidet sich nur durch das entgegengesetzte Vorzeichen des Vectorantheils, daher

$$K(pq) = Sp\,Sq - Sp\,Vq - Sq\,Vp + [S\,.\,Vp\,Vq - V\,.\,Vp\,Vq].$$

Das eingeklammerte Binom kann ersetzt werden durch

$[S\,.\,Vq\,Vp + V\,.\,Vq\,Vp]$ oder durch $Vq\,Vp$ es ist also

$$K(pq) = Sp\,Sq - Sp\,Vq - Sq\,Vp + Vq\,Vp.$$

Andererseits ist

$$Kq \,.\, Kp = (Sq - Vq)\,(Sp - Vp)$$
$$= Sp\,Sq - Sp\,Vq - Sq\,Vp + Vq\,Vp;$$

daher, wie man sieht

$$K(pq) = Kq \,.\, Kp. \ldots\ldots\ (56)$$

Oder in Worten: die conjugirte eines Productes ist gleich dem Producte der conjugirten Quaternionen in umgekehrter Ordnung.

Setzt man noch $p = q$, so ist

$$K(p^2) = (Kp)^2. \ldots\ldots\ (57)$$

Oder in Worten: die conjugirte eines Quadrates ist gleich dem Quadrate der conjugirten Quaternion.

Ist $pq = r$ und $K(pq) = Kr$, so ist

$$pq \,.\, K(pq) = r\,Kr.$$

Nun kann diess also auch geschrieben werden $pq\,Kq\,Kp$ oder nach dem associativen Princip $p(q\,Kq)\,Kp$; in diesem Producte kann $q\,Kq$ als Norm der Quaternion also als eine Scalargrösse vorgesetzt werden; man erhält also

$$q\,Kq \,.\, p\,Kp = r\,Kr$$

somit wenn man wieder die Normen einsetzt:

$$Nq \,.\, Np = Nr = Npq, \ldots\ldots\ (58)$$

oder in Worten: die Norm des Productes zweier Quaternionen ist gleich dem Producte der Normen derselben.

Setzt man noch $p = q$, so hat man

$$[Np]^2 = Np^2$$

Nun ist nach (15) $Nq = [Tq]^2$, ersetzt man darin q durch p^2 so erhält man $Np^2 = [Tp^2]^2$, nach der vorausgegangenen Formel ist aber $Np^2 = (Np)^2 = [(Tp)^2]^2$

somit $$[Tp]^2 = T(p^2), \ldots\ldots\ (59)$$

oder in Worten: die Norm oder der Tensor des Quadrates einer Quaternion ist gleich dem Quadrate bezüglich der Norm oder des Tensors derselben.

46. Vertauscht man in der Formel (53) p mit q so erhält man

$$qp = Sq\,Sp + Sq\,Vp + Sp\,Vq + S\,.\,Vq\,Vp + V\,.\,Vq\,Vp, \ldots\ldots\ (60)$$

daraus folgt

$$Sqp = Spq = Sp\,Sq + S\,.\,Vp\,Vq \ldots\ldots\ (61)$$

und $$Vqp = Sp\,Vq + Sq\,Vq - V\,.\,Vp\,Vq \ldots\ldots\ (62)$$

Es sind somit zwei Quaternionen im Allgemeinen nicht commutativ, indem zwar die Scalartheile der Producte gleich sind, die Vectortheile aber sich durch das Vorzeichen des Gliedes $V\,.\,Vq\,Vp$ von einander unterscheiden; es ergeben sich also folgende Beziehungen

$$Spq = Sqp \ldots\ldots\ (63)$$

$$Vpq + Vqp = 2(Sp\,Vq + Sq\,Vp) \ldots\ldots\ (64)$$

$$Vpq - Vqp = 2\,V\,.\,Vp\,Vq. \ldots\ldots\ (65)$$

Sind p und q complanare oder in parallelen Ebenen gelegene Quaternionen, so sind Vp und Vq parallel; daher ist $V\,.\,Vp\,Vq = 0$. Die Producte also pq und qp unterscheiden sich nicht, d. h. **complanare Quaternionen sind commutativ.**

In einem Producte diplanarer Quaternionen, welche als Quotienten von Vectoren gegeben sind, und unter denen ein Vector sowol im Divisor als im Dividend vorkommt, darf eine Verein-

fachung oder Abkürzung der Schreibweise nur dann eintreten, wenn der gemeinsame Vector als Divisor des Multiplicators und als Dividend des Multiplicands erscheint, oder, da wir stets den Multiplicator vor den Multiplicand schreiben, wenn das Ausstreichen des gemeinsamen Vectors durch einen Strich möglich ist, der von unten links nach oben rechts, in der Richtung der Feder beim Schreiben geführt wird. In Zeichen

$$\frac{\gamma}{\cancel{\beta}}\,\frac{\cancel{\beta}}{\alpha} = \frac{\gamma}{\alpha}.$$

Denn $\frac{\beta}{\alpha}$ als Multiplicator angewendet auf α gibt β, und wenn man auf dieses $\frac{\gamma}{\beta}$ als Multiplicator anwendet erhält man γ; ebenso aber, wenn man α multiplicirt mit $\frac{\gamma}{\alpha}$, also

$$\frac{\gamma}{\beta}\cdot\left(\frac{\beta}{\alpha}\cdot\alpha\right) = \gamma \text{ und } \frac{\gamma}{\alpha}\cdot\alpha = \gamma$$

daher

$$\frac{\gamma}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots (66)$$

Wollte man diese Abkürzung machen auch bei der umgekehrten Reihenfolge, so würde diess die Vertauschbarkeit der beiden Factoren voraussetzen, welche eben im Allgemeinen nicht statthaft ist. Nur wenn die Quaternionen complanar sind, kann geschrieben werden

$$\frac{\cancel{\beta}}{\alpha}\,\frac{\gamma}{\cancel{\beta}} = \frac{\gamma}{\alpha},$$

weil eben dann die Factoren commutativ sind.*)

47. Die bisher gewonnenen Sätze über die Multiplication der Vectoren und Quaternionen lassen sich auch aus der trinomischen Form der ersteren und der quadrinomischen Form der letzteren ableiten.

Ist $\alpha = a_1 i + a_2 j + a_3 k$

und $\beta = b_1 i + b_2 j + b_3 k$

*) Die Nichtcommutabilität der Factoren in den Quaternionen hängt mit der Symmetrie der körperlichen Gebilde zusammen. Während zwei ebene Dreiecke congruent sind, wenn sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen, sind zwei Dreikante (dreikantige körperliche Ecken) unter denselben Bedingungen congruent oder symmetrisch, je nachdem die Ordnung der Seiten dieselbe, oder die umgekehrte ist.

worin a_1, a_2, a_3 und b_1, b_2, b_3 die absoluten Längen der Projectionen von α und β auf die Axen i, j, k bedeuten, so ist, wenn man die Gesetze (§ 28) über die Multiplication der Versoren i, j, k berücksichtigt und stets den Multiplicator vor den Multiplicand schreibt

$$\alpha\beta = -(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)$$
$$+ (a_2b_3 - a_3b_2)i + (a_3b_1 - a_1b_3)j + (a_1b_2 - a_2b_1)k, \quad \ldots\ldots\ldots (67)$$

oder unter Benutzung der Determinantenform

$$\alpha\beta = -(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) + \begin{vmatrix} i & a_1 & b_1 \\ j & a_2 & b_2 \\ k & a_3 & b_3 \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots (68)$$

wodurch wir sogleich nach Vertauschung von α mit β und somit a mit b erhalten

$$\beta\alpha = -(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) - \begin{vmatrix} i & a_1 & b_1 \\ j & a_2 & b_2 \\ k & a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \quad \ldots\ldots\ldots (69)$$

weil durch die Vertauschung der Vertical-Colonnen nur das Zeichen der Determinante geändert wird. Daraus ersieht man also wieder, dass das Product zweier Vectoren eine Quaternion ist, und dass durch Vertauschung der beiden Vectorfactoren die Quaternion in die conjugirte übergeht, ferner folgt daraus

$$S\alpha\beta = -(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \quad \ldots\ldots\ldots (70)$$
$$V\alpha\beta = (a_2b_3 - a_3b_2)i + (a_3b_1 - a_1b_3)j + (a_1b_2 - a_2b_1)k. \quad \ldots (71)$$

Setzt man $\alpha = \beta$, somit $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $a_3 = b_3$, so verschwindet die Determinante und man bekommt

$$\alpha^2 = -(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \quad \ldots\ldots\ldots (72)$$

Nach (38) ist $\alpha^2 = -(T\alpha)^2$ und setzt man in (59) α für p, so ist

$$(T\alpha)^2 = T(\alpha^2) \quad \ldots\ldots\ldots (73)$$

somit

$$(T\alpha)^2 = T(\alpha^2) = +(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \quad \ldots\ldots\ldots (74)$$

Man erhält also das Quadrat des Tensors eines Vectors, wenn man die Coeficienten der Einheitsvectoren in der trinomischen Form des Vectors quadrirt und die Quadrate in eine Summe vereinigt. Demgemäss ist

$$[TV\alpha\beta]^2 = -(V\alpha\beta)^2 =$$
$$(a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2$$

48. Nun hatten wir Formel (48)

$$\alpha^2\beta^2 = (S\alpha\beta)^2 - (V\alpha\beta)^2$$

ersetzen wir darin α^2 nach Formel (72) und analog β^2 so wie auf der anderen Seite $S\alpha\beta$ nach (70) und $(V\alpha\beta)^2$ nach der letzten Formel des vorangegangenen §, so erhalten wir die bekannte Identität

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^2 (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) = (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 + (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2, \ldots\ldots\ (75)^*)$$

die in der analytischen Geometrie des Raumes häufig gebraucht wird.

49. Stellt man eine Quaternion in der Form dar

$$p = a_0 + \alpha = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k,$$

so ist $Sp = a_0$ und $Vp = \alpha$ und $TVp = T\alpha$.

Da nun

$$(Sp)^2 + (TVp)^2 = (Tp)^2 = Np,$$

so erhalten wir, wenn für $(Sp)^2$ und $(TVp)^2$ die gefundenen Ausdrücke substituirt werden

$$Np = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \ldots\ldots\ (76)$$

und

$$TV = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}. \ldots\ldots\ (77)$$

Eine andere Quaterion sei

$$q = b_0 + \beta = b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k.$$

Durch Multiplication von q mit p erhält man

$$\begin{aligned} pq = {} & a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 \\ & + (a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_3 - a_0b_2)i \\ & + (a_0b_2 - a_1b_3 + a_2b_0 - a_3b_1)j \\ & + (a_0b_3 + a_1b_2 - a_2b_1 + a_3b_0)k \ldots\ldots\ (78) \end{aligned}$$

oder kürzer, wenn die entsprechenden Coefficienten mit c_0, c_1, c_2, c_3 bezeichnet werden

$$pq = r = c_0 + c_1 i + c_2 j + c_3 k.$$

Das Product zweier Quaternionen ist also abermals eine Quaternion, und daher auch das Product beliebig vieler Quaternionen.

50. Aus der in (34) abgeleiteten Gleichung (58)

$$Npq = Np\,Nq$$

folgt, wenn wir die betreffenden Werte einsetzen

$$c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(a_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \quad (79)$$

ein bekannter von Euler herstammender Satz der Zahlenlehre, welcher besagt, dass die Summe von vier Quadraten sich zerlegen lässt in zwei Factoren, deren jeder aus der Summe von vier Quadraten zusammengesetzt ist.

51. Wir haben bisher im Vorhergehenden das associative Gesetz

---

*) Studnička: Sitzung der k. böhm. Gesellsch. d. Wissensch. Oct. 1875.

der Multiplication angenommen; dasselbe kann mit Hilfe des distributiven Princips bewiesen werden. Zu dem Zwecke hat man das Product der Quaternionen $p\ q\ r$ in ihren quadrinomischen Formel zu bilden, erstens, indem man das Product qr bildet und dann dasselbe mit p als Multiplicator multiplicirt; das anderemal bilde man das Product pq und wende dasselbe als Multiplicator auf r an. Wenn man nun stets den Multiplicator vor den Multiplicand schreibt, wird man unschwer finden, dass der Scalarantheil und die Coefficienten von i, j, k in beiden Fällen bezüglich gleich sind, so dass

$$p(qr) = (pq)r,$$

was man in Worten lesen kann: ein Product wird mit einem Factor multiplicirt, wenn man den Multiplicator mit dem neuen Factor multiplicirt. Daraus lässt sich dann leicht das associative Gesetz für beliebige Quaternionen und somit auch Vectoren beweisen, z. B.

$$pq\,rs = p(q\,.\,rs) = pq\,.\,rs = pqr\,.\,s. \ldots\ldots\ (80)$$

Sechster Abschnitt.

Product dreier Vectoren.

52. Beachtet man, dass $S.\,\gamma S\alpha\beta$ einfach die Scalar eines Vectors und daher gleich Null ist, so kann man nach Belieben einen solchen Ausdruck einschieben oder auslassen. Daher ist nun

$$\begin{aligned} S\alpha\beta\gamma &= S.\,(S\alpha\beta + V\alpha\beta)\,\gamma \\ &= S\gamma\,S\alpha\beta + S.\,(V\alpha\beta)\gamma = S\gamma\,V\alpha\beta \\ &= S.\,(\gamma\,S\alpha\beta + \gamma\,V\alpha\beta) \\ &= S\gamma(S\alpha\beta + V\alpha\beta) = S\gamma\alpha\beta. \end{aligned}$$

Ebenso

$$\begin{aligned} S\alpha\beta\gamma &= S.\,\alpha(S\alpha\beta + V\beta\gamma) \\ &= S.\,(V\beta\gamma)\alpha \\ &= S.\,(S\beta\gamma + V\beta\gamma)\,\alpha \\ &= S\beta\gamma\alpha. \end{aligned}$$

Es ändert also eine cyklische Vertauschung der drei Vectoren den Scalartheil ihres Productes nicht, wie es schon für die rechtwinkligen Vectoren i, j, k nachgewiesen worden ist; oder

$$S\alpha\beta\gamma = S\beta\gamma\alpha = S\gamma\alpha\beta \ldots\ldots\ (81)$$

Ferner

$$\begin{aligned} S\alpha\beta\gamma &= S\alpha V\beta\gamma \\ &= -S\alpha V\gamma\beta \\ &= -S\alpha\gamma\beta \end{aligned}$$

und ebenso $$S\alpha\beta\gamma = -S\beta\alpha\gamma \ldots\ldots\ (82)$$

Eine Aenderung der cyklischen Ordnung der drei Vectoren ändert also das Zeichen des Scalartheiles ihres Productes.

53. Wir wollen nun die geometrische Bedeutung von $S\gamma\alpha\beta$ suchen.

Es seien zu dem Zwecke OA, OB, OC die drei Vectoren α, β, γ, der Winkel $AOB = \varphi$, so ist

$$\begin{aligned} S\gamma\alpha\beta &= S\gamma V\alpha\beta \\ &= S.(T\gamma U\gamma\, TV\alpha\beta\, UV\alpha\beta) \end{aligned}$$

Die Tensoren können als Scalaren vor das Symbol gesetzt werden, somit ist

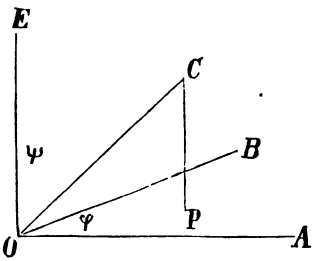
$$S\gamma\alpha\beta = TV\alpha\beta\,.\,T\gamma\; S.(U\gamma\,.\,UV\alpha\beta).$$

Nun ist $TV\alpha\beta = OA\,.\,OB \sin\varphi$ der Flächeninhalt des aus OA und OB gebildeten Parallelogramms, $UV\alpha\beta$ ist ein Einheitsvector senkrecht errichtet auf OA und OB; schliesst dieser Vector OE mit OC den Winkel ψ ein, so ist $S(U\gamma\,.\,UV\alpha\beta) = -\cos\psi$ und daher

$$T\gamma\, S(U\gamma\,.\,UV\alpha\beta) = -OC\cos\psi = -CP$$

oder gleich dem von C auf die Ebene AOB gefällten Perpendikel.

Fig. 19.



Es ist somit $S\gamma\alpha\beta$ das negative Volumen des aus den Kanten OA, OB, OC gebildeten Parallelepipeds, oder das negative sechsfache Volumen der aus den drei Kanten gebildeten Pyramide.

Versetzt man das Auge in den Scheitel der Pyramide, so folgen die Ecken des Dreieckes CAB dem Zeiger der Uhr, und das Zeichen des Volumens der Pyramide ändert sich nicht bei der cyklischen Vertauschung ABC, BCA d. h. also, wenn die Begrenzung der Pyramide durch gleichgerichtete Bewegung einer Kante auf dem Umfange des Grunddreieckes entsteht, wohl aber geht das Zeichen in das entgegengesetzte über, durch eine Aende-

rung dieser cyklischen Ordnung, indem dann die erzeugende Gerade die entgegengesetzte Bewegung (entgegengesetzt dem Uhrzeiger) befolgt. Sehen wir also das Volumen der Pyramide im ersten Falle als negativ an, so müssen wir es im anderen Falle als positiv annehmen.

Das Volumen ändert auch das Zeichen, wenn die Senkrechte CP oberhalb oder unterhalb der Grundfläche AOB liegt (in welchen Fällen auch die Drehung eine entgegengesetzte ist), und wird gleich Null, wenn $CP = 0$ ist, d. h. wenn der Vector OC in die Ebene AOB fällt. Dieser Schluss lässt sich auch umkehren, wenn das Volumen der Pyramide gleich Null ist, muss ein Vector in die Ebene der beiden anderen fallen; somit

$$\left.\begin{array}{l}\text{wenn } S\alpha\beta\gamma = 0, \text{ so } \alpha, \beta, \gamma \text{ complanar und}\\ \text{wenn } \alpha, \beta, \gamma \text{ complanar, so } S\alpha\beta\gamma = 0.\end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (83)$$

Das Volumen der Pyramide kann auch durch eine Determinante ausgedrückt werden.

Es seien α, β, γ bezüglich gleich

$$a_1 i + a_2 j + a_3 k,\ b_1 i + b_2 j + b_3 k,\ c_1 i + c_2 j + c_3 k,$$

worin a_1, a_2, a_3 die rechtwinkligen Coordinaten von A, b_1, b_2, b_3 die von B, und c_1, c_2, c_3 die von C bedeuten, gemessen vom Ursprung O; dann ist

$$\begin{aligned} S\alpha\beta\gamma = S.&(a_1 i + a_2 j + a_3 k)\\ &\times (b_1 i + b_2 j + b_3 k)\\ &\times (c_1 i + c_2 j + c_3 k)\end{aligned}$$

Wenn wir nun beachten, dass der Scalartheil dieses Productes beschränkt ist auf die Glieder, welche alle drei Vectoren i, j, k enthalten, und ferner, dass das Zeichen eines Gliedes im Producte — oder + ist, je nachdem die cyclische Ordnung erhalten bleibt oder nicht, so begreifen wir, dass diess genau dieselben Bedingungen sind, die eine Determinante erfüllt; somit

$$S\alpha\beta\gamma = -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix} \ldots\ldots\ldots (84)$$

Das Volumen der Pyramide $OABC$ ist der sechste Theil davon.

54. Um nun weiter den zweiten Theil von $\alpha\beta\gamma$ nämlich $V\alpha\beta\gamma$ zu untersuchen, gehen wir von den beiden identischen Gleichungen aus

$$\gamma S\beta\alpha - S\beta\alpha.\gamma = 0$$

und

$$\gamma V\beta\alpha - V\beta\alpha.\gamma = 2V.\gamma V\beta\alpha,$$

deren erste an sich klar ist, weil Vectoren mit Scalaren commutativ sind; die andere geht aus (42) hervor wenn man α durch γ und β durch $V\beta\alpha$ ersetzt. Durch Addition derselben erhält man

$$\begin{aligned} 2V.\gamma V\beta\alpha &= \gamma(S\beta\alpha + V\beta\alpha) - (S\beta\alpha + V\beta\alpha)\gamma \\ &= \gamma\beta\alpha - \beta\alpha\gamma \\ &= \gamma\beta\alpha + \beta\gamma\alpha - \beta\alpha\gamma - \beta\gamma\alpha \\ &= (\gamma\beta + \beta\gamma)\alpha - \beta(\alpha\gamma + \gamma\alpha) \\ &= 2\alpha S\beta\gamma - 2\beta S\gamma\alpha \qquad \text{(nach 41)} \end{aligned}$$

oder nach Abkürzung mit dem Factor 2

$$V.\gamma V\beta\alpha = \alpha S\beta\gamma - \beta S\gamma\alpha \ldots\ldots\ldots (85)$$

Nun ist für beliebige drei Vectoren

$$V\gamma\beta\alpha = \gamma S\beta\alpha + V.\gamma V\beta\alpha;$$

ersetzt man darin das letzte Glied nach (85), so erhält man

$$V\gamma\beta\alpha = \gamma S\beta\alpha + \alpha S\beta\gamma - \beta S\gamma\alpha$$

oder

$$V\gamma\beta\alpha = \alpha S\beta\gamma - \beta S\gamma\alpha + \gamma S\beta\alpha \ldots\ldots\ldots (86)$$

55. Für beliebige vier Vectoren erhält man aus (85), indem man an die Stelle von γ setzt $V\gamma\delta$

$$V.V\gamma\delta V\beta\alpha = \alpha S.\beta V\gamma\delta - \beta S.\alpha V\gamma\delta;$$

wenn man noch auf der linken Seite zweimal unter dem Vectorzeichen die Factoren vertauscht (wodurch der Wert und das Vorzeichen nicht geändert wird) und bemerkt, dass

$$S.\beta V\gamma\delta = S\beta\gamma\delta,$$

so erhält man

$$V.V\alpha\beta V\gamma\delta = \alpha S\beta\gamma\delta - \beta S\alpha\gamma\delta. \ldots\ldots\ldots (87)$$

Setzt man an die Stelle von α, β, γ, δ bezüglich γ, δ, β, α, so geht sie über in

$$V.V\gamma\delta V\beta\alpha = \gamma S\delta\beta\alpha - \delta S\gamma\beta\alpha$$

und da

$$S\delta\beta\alpha = -S\alpha\beta\delta \text{ und } S\gamma\beta\alpha = -S\alpha\beta\gamma$$

so

$$V.V\alpha\beta V\gamma\delta = \delta S\alpha\beta\gamma - \gamma S\alpha\beta\delta \ldots\ldots\ldots (88)$$

Jeder der beiden letzteren Ausdrücke bedeutet einen fünften Vector ε, welcher gleichzeitig mit α, β und mit γ, δ complanar, und daher die Durchschnittslinie der Ebenen AOB und COD ist; wovon man sich leicht durch Bildung von $S\alpha\beta\varepsilon$ und $S\gamma\delta\varepsilon$ überzeugen kann. Denn wenn man etwa in (88) mit $\alpha\beta$ multiplicirt und die Scalartheile nimmt, so erhält man rechter Hand

$$S.\alpha\beta[\delta S\alpha\beta\gamma - \gamma S\alpha\beta\delta] = S\alpha\beta\gamma\, S\alpha\beta\delta - S\alpha\beta\delta\, S\alpha\beta\gamma = 0$$

weil sowol die Multiplication als das Scalarnehmen distributive

Operationen sind und bei dem letzteren eine Scalargrösse vorgesetzt werden kann.

56. Setzt man die rechten Theile der Gleichungen (87) und (88) einander gleich und ersetzt δ durch ϱ, so findet man

$$\varrho S\alpha\beta\gamma = \alpha S\beta\gamma\varrho + \beta S\gamma\alpha\varrho + \gamma S\alpha\beta\varrho \ldots\ldots\ldots (89)$$

eine in der Quaternion sehr wichtige Formel, nach welcher ein Vector ϱ ausgedrückt werden kann als eine lineare Function von drei irgend welchen gegebenen diplanaren Vectoren α, β, γ.

Die folgende Gleichung (90) drückt den Vector ϱ aus durch die Vectoren, die sich aus den Producten von je zwei dieser Vectoren α, β, γ ergeben.

$V(\gamma\delta\alpha\beta)$ kann geschrieben werden, das einemal als $V(\gamma . \delta\alpha\beta)$, das anderemal als $V(\gamma\delta . \alpha\beta)$; die Resultate mögen dann verglichen werden.

$$\begin{aligned} V(\gamma . \delta\alpha\beta) &= V . \gamma(S\delta\alpha\beta + V\delta\alpha\beta) \\ &= \gamma S\alpha\beta\delta + V . \gamma V\delta\alpha\beta, \text{ nach (82)} \\ &= \gamma S\alpha\beta\delta + V . \gamma(\delta S\alpha\beta - \alpha S\delta\beta + \beta S\delta\alpha), \text{ nach (86)} \\ &= \gamma S\alpha\beta\delta + V\gamma\delta S\alpha\beta - V\gamma\alpha S\delta\beta + V\gamma\beta S\delta\alpha; \\ V(\gamma\delta . \alpha\beta) &= V . (S\gamma\delta + V\gamma\delta)(S\alpha\beta + V\alpha\beta) \\ &= V\alpha\beta S\gamma\delta + V\gamma\delta S\alpha\beta + V . V\gamma\delta V\alpha\beta \\ &= V\alpha\beta S\gamma\delta + V\gamma\delta S\alpha\beta - V . V\alpha\beta V\gamma\delta \\ &= V\alpha\beta S\gamma\delta + V\gamma\delta S\alpha\beta - \delta S\alpha\beta\gamma + \gamma S\alpha\beta\delta, \text{ nach (88)} \end{aligned}$$

Werden die beiden Ausdrücke gleichgesetzt und die gemeinsamen Glieder weggelassen, so hat man, wenn man noch δ durch ϱ ersetzt:

$$\varrho S\alpha\beta\gamma = V\beta\gamma S\alpha\varrho + V\gamma\alpha S\beta\varrho + V\alpha\beta S\gamma\varrho \ldots\ldots\ldots (90)$$

Wird diese Gleichung nochmals mit δ multiplicirt und werden beiderseits die Scalartheile genommen, so erhält man, wenn man noch berücksichtigt dass $S\delta V\beta\gamma = S\delta\beta\gamma$ (nach § 52)

$$S\alpha\varrho S\beta\gamma\delta - S\beta\varrho S\gamma\delta\alpha + S\gamma\varrho S\delta\alpha\beta - S\delta\varrho S\alpha\beta\gamma = 0; \ldots\ldots (91)$$

worin α, β, γ, δ, ϱ irgend welche fünf Vectoren bedeuten.

57. Die drei letzten Formeln (89), (90), (91) sind im Quaternionscalcul von grosser Wichtigkeit.

Ein Vector ϱ kann im Allgemeinen angesehen werden als abhängig von drei Scalaren (den Coordinaten seines Endpunktes); er kann daher nicht durch weniger als drei Scalargleichungen bestimmt und nicht aus weniger als vier solchen eliminirt werden.

Als Beispiel einer solchen Bestimmung eines Vectors, seien die drei gegebenen Gleichungen

$$S\alpha\varrho = a, \quad S\beta\varrho = b, \quad S\gamma\varrho = c \ldots\ldots\ldots (92)$$

worin α, β, γ drei gegebene diplanare Vectoren und a, b, c drei gegebene Scalaren bedeuten. Dann ist der gesuchte Ausdruck für den Vector ϱ nach (90)

$$\varrho = e^{-1}(aV\beta\gamma + bV\gamma\alpha + cV\alpha\beta) \ldots\ldots\ldots (93)$$

wenn man $S\alpha\beta\gamma$ mit e bezeichnet. Als ein anderes Beispiel seien die drei gegebenen Gleichungen

$$S\beta\gamma\varrho = a_1, \quad S\gamma\alpha\varrho = b_1, \quad S\alpha\beta\varrho = c_1 \ldots\ldots\ldots (94)$$

so ist, wenn die Scalargrösse e dieselbe Bedeutung hat, nach (89)

$$\varrho = e^{-1}(a_1\alpha + b_1\beta + c_1\gamma). \ldots\ldots\ldots (95)$$

Als Beispiel der Elimination eines Vectors, seien die vier Scalargleichungen

$$S\alpha\varrho = a, \quad S\beta\varrho = b, \quad S\gamma\varrho = c, \quad S\delta\varrho = d, \ldots\ldots\ldots (96)$$

so ist nach (91) die resultirende Gleichung, welche ϱ nicht mehr enthalten darf, sondern einzig die vier Vectoren $\alpha \ldots \delta$, und die vier Scalaren $a \ldots d$

$$a \,.\, S\beta\gamma\delta - bS\gamma\delta\alpha + cS\delta\alpha\beta - d \,.\, S\alpha\beta\gamma = 0. \ldots\ldots\ldots (97)$$

58.
$$\begin{aligned} S\alpha\beta\gamma\delta &= S \,.\, (S\alpha\beta\gamma + V\alpha\beta\gamma)\delta \\ &= S\delta S\alpha\beta\gamma + S\delta V\alpha\beta\gamma, \end{aligned}$$

der erste Theil ist als Scalar eines Vectors gleich Null, der zweite Theil kann nach (86), wenn man darin der Reihe nach γ, β, α, durch α, β, γ ersetzt, geschrieben werden

$$S \,.\, \delta(\gamma S\beta\alpha - \beta S\alpha\gamma + \alpha S\beta\gamma),$$

da sich nun in jedem Gliede die Scalargrösse vor das Scalarzeichen bringen lässt, so hat man

$$S\alpha\beta\gamma\delta = S\alpha\beta S\gamma\delta - S\alpha\gamma S\beta\delta + S\alpha\delta S\beta\gamma \ldots\ldots\ldots (98)$$

59.
$$\begin{aligned} S(V\alpha\beta V\gamma\delta) &= S \,.\, (\alpha\beta - S\alpha\beta)\,(\gamma\delta - S\gamma\delta) \\ &= S\alpha\beta\gamma\delta - S\alpha\beta S\gamma\delta - S\alpha\beta S\gamma\delta + S\alpha\beta S\gamma\delta \\ &= S\alpha\beta\gamma\delta - S\alpha\beta S\gamma\delta \end{aligned}$$

ersetzt man darin $S\alpha\beta S\gamma\delta$ durch den Werth der sich aus 98 ergibt, so erhält man für den Theil rechts

$$= S\alpha\delta S\beta\gamma - S\alpha\gamma S\beta\delta \ldots\ldots\ldots (99)$$

60.
$$\begin{aligned} S\alpha\beta\gamma\delta &= S \,.\, (V\alpha\beta\gamma)\,\delta \\ &= S \,.\, \delta V\alpha\beta\gamma \\ &= S\delta\alpha\beta\gamma \ldots\ldots\ldots (100) \end{aligned}$$

(Vergleiche § 52). Es ändert also eine cyklische Vertauschung auch von vier Vectoren den Scalartheil ihres Productes nicht.

Siebenter Abschnitt.

Beispiele und Anwendungen.

1. Ein Viereck, in dem zwei gegenüberliegende Seiten gleich und parallel sind, ist ein Parallelogramm.

Es sei $AB = \alpha$, so ist nach der Voraussetzung

$$DC = \alpha;$$

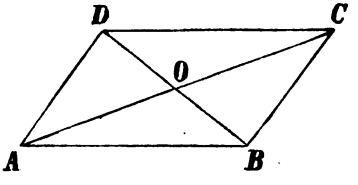
ferner

$$AD = \beta$$
$$BC = \gamma$$
$$AC = \alpha + \gamma = \beta + \alpha$$

somit $\gamma = \beta$

d. h. $AD = BC$ und $AD \parallel BC$.

Fig. 20.



2. Die Diagonalen eines Parallelogramms halbiren sich.

Es heisse der Durchschnittspunkt der Diagonalen O und es seien dieselben Bezeichnungen wie in 1, so ist

$$AO = xAC = x(\alpha + \beta)$$
$$OB = yDB = y(-\beta + \alpha),$$

worin x, y unbekannte Scalaren vorstellen, so ist

$$AB = AO + OB$$

oder

$$\alpha = x(\alpha + \beta) + y(-\beta + \alpha)$$
$$\alpha = (x + y)\alpha + (x - y)\beta;$$

da nun α und β verschiedene Vectoren sind, so müssen die Coefficienten von α und β auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens einander gleich sein; somit

$$1 = x + y$$
$$0 = x - y$$

oder

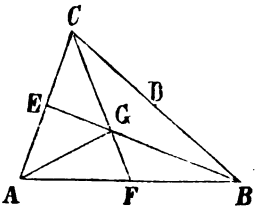
$$x = {}^1/_2, \quad y = {}^1/_2.$$

Es ist also $AO = {}^1/_2 AC$, $OB = {}^1/_2 DB$.

3. Die Mittellinien eines Dreieckes schneiden sich in einem Punkte, der von jedem Eckpunkte um $^2/_3$ der Mittellinie entfernt ist.

Es seien $AB = \gamma$, $AC = \beta$, $BC = -\gamma + \beta$; D, E, F die Mittelpunkte der Seiten, G der Durchschnitt von BE und CF.

Fig. 21.



So ist

$$AG = AE + EG = \frac{\beta}{2} + x\left(-\frac{\beta}{2} + \gamma\right)$$

andererseits

$$= AF + FG = \frac{\gamma}{2} + y\left(-\frac{\gamma}{2} + \beta\right);$$

daraus folgt, wenn man gleichsetzt und ordnet

$$\frac{1-x}{2}\beta + x\gamma = \frac{1-y}{2}\gamma + y\beta,$$

oder $\quad 1-x = 2y, \quad 2x = 1-y$

somit $\quad x = {}^1/_3, \quad y = {}^1/_3.$

Es ist daher

$$AG = \frac{\beta}{2} + {}^1/_3\left(-\frac{\beta}{2} + \gamma\right)$$

$$= {}^2/_6(\beta + \gamma)$$

und $\quad AD = AB + {}^1/_2 BC = \gamma + {}^1/_2(-\gamma + \beta)$

$$= {}^3/_6(\beta + \gamma).$$

Da nun $AG = {}^2/_3 AD$, so geht die Mittellinie AD durch den Punkt G.

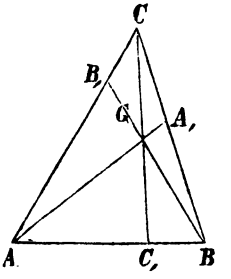
4. Von einem Punkte G sind drei beliebige complanare Vectoren GA, GB, GC gezogen, durch deren Endpunkte das Dreieck ABC gelegt ist; man hat zu finden die Beziehung zwischen den sechs Abschnitten, in welche die rückwärtigen Verlängerungen der Vectoren GA_1, GB_1, GC_1 die Seiten des Dreieckes theilen.

Es seien die Vectoren GA, GB, GC bezüglich bezeichnet durch $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, worin a, b, c Scalaren sind, so muss da sie complanar sind nach § 9 die Gleichung

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$$

befriedigt werden.

Fig. 22.



Ferner muss

$$GA_1 = \alpha_1 = x\alpha,$$

da es mit GA in einer Geraden liegt und ebenso

$$GB_1 = \beta_1 = y\beta, \quad GC_1 = \gamma_1 = z\gamma.$$

Setzt man an die Stelle von α in die Gleichung der Complanarität den Wert $\frac{\alpha_1}{x}$, so hat man

$$\frac{a}{x}\alpha_1 + b\beta + c\gamma = 0,$$

welche Gleichung aussagt, dass α_1 mit β und γ noch immer in einer Ebene liegt. Da nun die Endpunkte dieser Vectoren nämlich B, A_1, C in einer Geraden liegen sollen, so müssen nach (3) die Coefficienten gleich Null sein, nämlich

$$\frac{a}{x} + b + c = 0$$

und ebenso

$$a + \frac{b}{y} + c = 0$$

$$a + b + \frac{c}{z} = 0.$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich

$$x = -\frac{a}{b+c}, \quad y = -\frac{b}{a+c}, \quad z = -\frac{c}{a+b}$$

und somit

$$\alpha_1 = -\frac{a\alpha}{b+c}, \quad \beta_1 = -\frac{b\beta}{a+c}, \quad \gamma_1 = -\frac{c\gamma}{a+c}$$

oder

$$\alpha_1 = \frac{b\beta + c\gamma}{b+c}, \quad \beta_1 = \frac{c\gamma + a\alpha}{c+a}, \quad \gamma_1 = \frac{a\alpha + b\beta}{a+b}.$$

Die letzten drei Gleichungen kann man auch schreiben

$$b(\alpha_1 - \beta) = c(\gamma - \alpha_1), \quad c(\beta_1 - \gamma) = a(\alpha - \beta_1),$$
$$a(\gamma_1 - \alpha) = b(\beta - \gamma_1),$$

woraus sich ergibt

$$\frac{\alpha_1 - \beta}{\gamma - \alpha_1} = \frac{c}{b}, \quad \frac{\beta_1 - \gamma}{\alpha - \beta_1} = \frac{a}{c}, \quad \frac{\gamma_1 - \alpha}{\beta - \gamma_1} = \frac{b}{a}$$

oder

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{c}{b}, \quad \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{a}{c}, \quad \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{b}{a}.$$

Daraus erhält man sofort die bekannte Relation der sechs Segmente

$$\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = 1$$

und diess ist auch die Bedingung, welche von den Punkten A_1, B_1, C_1 erfüllt sein muss, wenn die von ihnen zu den gegenüberliegenden Ecken eines Dreieckes gezogenen Geraden sich in einem Punkte schneiden sollen.

Offenbar ist die Aufgabe 3 ein specieller Fall dieses allgemeinen Satzes.

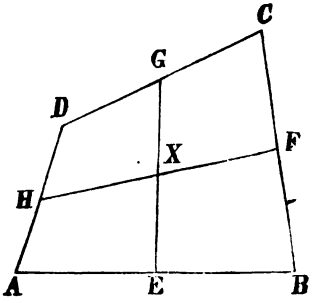
5. Die Mittelpunkte der Geraden, welche die Halbirungspunkte der gegenüberliegenden Seiten eines Viereckes verbinden, fallen zusammen, mögen die Seiten des Viereckes in einer Ebene liegen oder nicht.

Es sei $ABCD$ das Viereck, E, F, G, H die Mittelpunkte der Seiten,

X der Mittelpunkt von EG

Y der Mittelpunkt von FH;

Fig. 23.



ferner

$$AB = \alpha,\ AC = \beta,\ AD = \gamma,$$

dann ist $AE + EG = AD + DG$

$$\frac{\alpha}{2} + EG = \gamma + {}^1/_2(-\gamma+\beta)$$

somit $EG = {}^1/_2(\gamma + \beta - \alpha)$

und $AX = AE + {}^1/_2 EG$

$= {}^1/_4(\alpha+\beta+\gamma)$.

Um den Vector des Mittelpunktes von FH Y zu finden, haben wir ebenso zu verfahren.

$$AH + HF = AB + BF$$

$$\frac{\gamma}{2} + HF = {}^1/_2(\alpha+\beta)$$

und

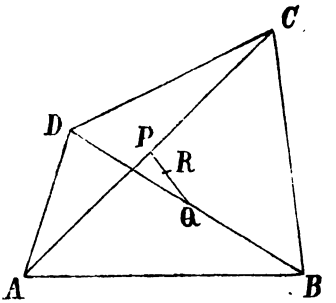
$$AY = AH + {}^1/_2 HF$$

$$= {}^1/_4(\alpha+\beta+\gamma)$$

Da also X und Y dieselben Vectoren haben, so fallen diese Punkte zusammen; dabei haben wir nirgends vorausgesetzt, ob die Seiten des Viereckes in einer Ebene liegen oder nicht.

6. Der Durchschnittspunkt der die Seiten eines Viereckes halbirenden Geraden (der Punkt X der vorigen Aufgabe) fällt zusammen mit dem Mittelpunkte jener Geraden, welche die Mittelpunkte der Diagonalen des Viereckes verbindet.

Fig. 24.



Bei denselben Bezeichnungen wie in (5) sei P der Mittelpunkt von AC, Q jener von BD und R der Mittelpunkt von PQ,

so ist

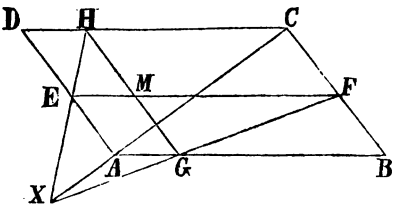
$$AP = {}^1/_2\beta$$
$$AQ = AB + {}^1/_2 BD$$
$$= {}^1/_2(AB + AD)$$
$$AR = AP + {}^1/_2 PQ$$
$$= {}^1/_2(AQ + AP)$$
$$= {}^1/_4(\alpha + \beta + \gamma).$$

Daher fällt somit X und R zusammen.

7. Wenn durch einen Punkt innerhalb eines Parallelogramms zu den Seiten Parallele gezogen werden, so schneiden sich die Diagonalen der auf diese Art abgeschnittenen Parallelogramme mit der Diagonale des ursprünglichen in einem Punkte.

Es seien in dem Parallelogramm $ABCD$ durch den Punkt M gezogen die Parallelen EF und GH. Man verlängere HE und FG bis zu ihrem Durcsschnittspunkte X und verbinde diesen mit A. Bezeichnet man nun

Fig. 25.



$$AB = \alpha, \quad AD = \beta,$$
$$AG = m\alpha, \quad AE = n\beta,$$

so ist

$$EH = EM + MH = m\alpha + (1-n)\beta$$
$$GF = GM + MF = n\beta + (1-m)\alpha$$

und

$$XA = XG - AG = x[n\beta + (1-m)\alpha] - m\alpha$$

andererseits

$$XA = XE - AE = y[m\alpha + (1-n)\beta] - n\beta.$$

Die Scalarcoefficienten von α und β müssen einander bezüglich gleich sein, daher

$$nx = y(1-n) - n$$
$$(1-m)x - m = my,$$

aus welchen Gleichungen leicht folgt

$$x = \frac{m}{1-m-n}, \quad y = \frac{n}{1-m-n}$$

Es ist also

$$XA = \frac{m}{1-m-n}[n\beta + (1-m)\alpha] - m\alpha$$

oder nach einigen Reductionen

$$XA = \frac{mn}{1-m-n}(\alpha + \beta).$$

Da nun

$$AC = \alpha + \beta,$$

so liegen XA und AC in einer Geraden.

8. Sinus und Cosinus der Summe zweier Winkel.

Es seien α, β, γ drei vom gemeinsamen Ursprung gezogene complanare Einheitsvectoren; der Winkel zwischen α und β sei φ, der zwischen β und γ sei ψ, so ist, weil die drei Vectoren complanar sind, (§ 46)

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\gamma}{\beta}$$

oder

$$\cos(\varphi + \psi) + \varepsilon \sin(\varphi + \psi) = (\cos\varphi + \varepsilon \sin\varphi)(\cos\psi + \varepsilon \sin\psi)$$

Führt man die Multiplication aus und setzt die Scalar- und Vectortheile für sich einander gleich, so erhält man

$$\cos(\varphi + \psi) = \cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi$$
$$\sin(\varphi + \psi) = \sin\varphi \cos\psi + \cos\varphi \sin\psi.$$

9. Die Summe der Quadrate der Diagonalen eines Parallelogramms zu finden.

Es seien in dem Parallelogramm $ABCD$ (Beisp. 1)

$$AB = \alpha, \quad AD = \beta,$$

so ist

$$AC = \alpha + \beta, \quad DA = \alpha - \beta,$$

somit

$$AC^2 = \alpha^2 + 2S\alpha\beta + \beta^2$$
$$DB^2 = \alpha^2 - 2S\alpha\beta + \beta^2$$

daher

$$AC^2 + DB^2 = 2(\alpha^2 + \beta^2).$$

Heissen nun die Masszahlen oder Tensoren von AC, DB, α, β etwa bezüglich d, d_1, a, b so ergibt sich

$$d^2 + d_1^2 = 2(a^2 + b^2).$$

10. Den Winkel, den die beiden Diagonalen eines Parallelogramms einschliessen zu finden.

Multiplicirt man die beiden Diagonalen, so erhält man nach (42, 6) unter Gebrauch der vorigen Bezeichnungen

$$AC \,.\, DB = \alpha^2 - 2V\alpha\beta - \beta^2$$

Heisst nun der von den Diagonalen eingeschlossene Winkel ν und $BAD = \varphi$, so hat man

$$d\,d_1(-\cos\nu + \varepsilon \sin\nu) = -a^2 + b^2 - 2ab\,\delta \sin\varphi,$$

worin ε einen Einheitsvector senkrecht auf die Ebene des Papiers nach unten, δ aber einen solchen nach oben bedeutet, so dass $\delta = -\varepsilon$ ist. Werden nun die Scalar- und die Vectortheile gleichgesetzt, so erhält man

$$dd_1 \cos v = a^2 - b^2;\ dd_1 \sin v = 2ab \sin \varphi$$

und durch deren Division

$$\operatorname{tg} v = \frac{2ab \sin \varphi}{a^2 - b^2}.$$

11. Eine Seite eines Dreieckes durch die beiden anderen Seiten und den von ihnen eingeschlossenen Winkel auszudrücken.

Es sei in dem Dreiecke ABC der Vector $CB = \alpha$, $CA = \beta$, $AB = \gamma$, die bezüglichen Strecken a, b, c der Winkel $ACB = C$; so ist

$$\gamma = \alpha - \beta$$

durch Quadrirung erhält man

$$\gamma^2 = \alpha^2 - 2S\alpha\beta + \beta^2$$

oder $$-c^2 = -a^2 + 2ab \cos C + b^2$$

und daher

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

12. Die Beziehung zu finden zwischen zwei Seiten und den gegenüberliegenden Winkeln eines Dreieckes.

Bei denselben Bezeichnungen wie in der vorigen Aufg. ist

$$VBC \,.\, BA = V.-\alpha(-\alpha+\beta) = ac\,\varepsilon \sin B$$
$$VAB \,.\, AC = V.(\alpha-\beta)(-\beta) = bc\,\varepsilon \sin A,$$

wo ε einen Einheitsvector senkrecht auf die Ebene ABC bedeutet. Nun ist

$$V.-\iota(-\alpha+\beta) = -V\alpha\beta$$

und $$V.(\alpha-\beta)(-\beta) = -V\alpha\beta;$$

daher $$ac\,\varepsilon \sin B = bc\,\varepsilon \sin A$$

oder $$a \sin B = b \sin A$$

somit $$a : b = \sin A : \sin B$$

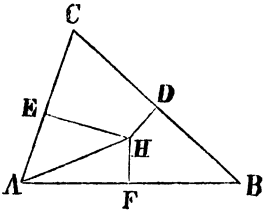
13. Den Mittelpunkt des einem Dreieck umschriebenen Kreises zu finden.

Im Dreiecke ABC seien D, E, F die Mittelpunkte der Seiten BC, CA, AB; man errichte in ihnen auf die Seiten Perpendikel. Ist nun $AB = \gamma$, $AC = \beta$, $CB = \alpha = -\beta + \gamma$, so sind die auf ihre Innenseite errichteten Senkrechten bezüglich

$$x\varepsilon\gamma,\quad -y\varepsilon\beta,\quad -z\varepsilon\alpha$$

wo ε wieder den auf die Ebene des Papiers errichteten, senkrechten Einheits-

Fig. 26.



vector bezeichnet. Für den Durchschnittspunkt des ersten und zweiten muss

$$AH = AF + FH = AE + EH$$

oder
$$\frac{\gamma}{2} + x\,\varepsilon\gamma = \frac{\beta}{2} - y\,\varepsilon\beta.$$

Um aus dieser Gleichung x zu bestimmen multipliciren wir dieselbe mit β und nehmen dann die Scalartheile oder, wie man auch sagt, operiren wir mit dem Symbol $S\beta$; so erhalten wir

$$\tfrac{1}{2}S\beta\gamma + x\,S\beta\varepsilon\gamma = \tfrac{1}{2}S\beta^2$$

indem $S\beta\varepsilon\beta = S\varepsilon\beta^2 = 0$ ist. Wir erhalten daraus

$$x = \frac{S\beta(\beta-\gamma)}{2\,S\beta\varepsilon\gamma} = \frac{-S\beta\alpha}{2\,S\beta\varepsilon\gamma}.$$

Für den Durchschnittspunkt der beiden letzten Perpendikel haben wir

$$BH' = BF + FH' = BD + DH'$$

oder
$$-\frac{\gamma}{2} + x\,\varepsilon\gamma = -\frac{\alpha}{2} - z\,\varepsilon\alpha;$$

operirend mit $S\alpha$ erhält man

$$-\frac{S\alpha\gamma}{2} + x\,S\alpha\varepsilon\gamma = -\frac{S\alpha^2}{2}, \quad \text{woraus}$$

sich ergibt
$$x = \frac{S\alpha(\gamma-\alpha)}{2\,S\alpha\varepsilon\gamma} = -\frac{S\alpha\beta}{2\,S\varepsilon\gamma\beta}.$$

Da also die beiden für x erhaltenen Werte gleich sind, so folgt, dass H und H' zusammenfallen oder, dass alle Perpendikel sich in einem Punkte schneiden. Es ist somit

$$AH = \frac{\gamma}{2} - \frac{S\alpha\beta}{2\,S\varepsilon\gamma\beta}\,.\,\varepsilon\gamma = \frac{\gamma}{2} + \frac{S(\beta-\gamma)\beta}{S\beta\,\varepsilon\gamma}\,\varepsilon\gamma.$$

Um die absolute Länge R von AH zu finden, haben wir die letzte Gleichung zu quadriren.

$$-R^2 = \left(\frac{\gamma}{2} + x\,\varepsilon\gamma\right)^2 = \frac{\gamma^2}{4} + x\,S\gamma\varepsilon\gamma + x^2(\varepsilon\gamma)^2$$

da nun $\dfrac{\gamma^2}{4} = -\dfrac{c^2}{4}$, wenn $T\gamma = c$

$$S\gamma\varepsilon\gamma = 0, \quad \text{weil } \varepsilon\gamma \perp \gamma$$

$$FH^2 = (\varepsilon\gamma)^2 = (\varepsilon\,.\,U\gamma\,.\,c)^2 = -c^2$$

$$x^2 = \left(\frac{S\beta\alpha}{2\,S\varepsilon\gamma\beta}\right)^2 = \frac{a^2b^2\cos^2 C}{4b^2c^2\sin^2 A}\,*)$$

---

*) $S\varepsilon\gamma\beta$ ist der sechsfache Kubikinhalt der über ABC errichteten Pyramide mit der Höhe $\varepsilon = 1$, also gleich $bc\sin A$, wenn b der Tensor von β ist.

so ist

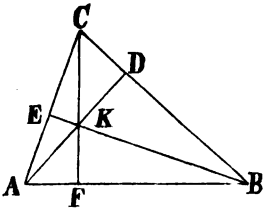
$$R^2 = \frac{c^2}{4}\left(\frac{c^2 \sin^2 A + a^2 \cos^2 C}{c^2 \sin^2 A}\right)$$

und somit

$$R = \frac{\sqrt{c^2 \sin^2 A + a^2 \cos^2 C}}{2 \sin A} = \frac{a}{2 \sin A}$$

14. Den Durchschnittspunkt der Höhenperpendikel eines Dreieckes zu finden. Bei denselben Bezeichnungen, wie in der vorigen Aufgabe, sind die Höhenperpendikel CF, BE, AD $-x\varepsilon\gamma$, $+y\varepsilon\beta$, $+z\varepsilon\alpha$.

Fig. 27.



Für den Durchschnittspunkt des ersten und zweiten K hat man die Gleichung

$$AK = AC + CK = AB + BK$$
$$\beta - x\varepsilon\gamma = \gamma + y\varepsilon\beta.$$

Operirt man $S\beta$, so erhält man

$$S\beta^2 - x\,S\beta\varepsilon\gamma = S\beta\gamma$$

woraus

$$x = \frac{S\beta(\beta-\gamma)}{S\beta\varepsilon\gamma}$$

Für den Durchschnittspunkt des ersten und dritten K_1, hat man

$$AK_1 = AC + CK_1$$
$$z\varepsilon\alpha = \beta - x\varepsilon\gamma,$$

woraus sich nach Behandlung der Gleichung mit $S\alpha$ ergibt

$$x = \frac{S\alpha\beta}{S\alpha\varepsilon\gamma} = \frac{S(\beta-\gamma)\beta}{S(\beta-\gamma)\varepsilon\gamma} = \frac{S(\beta-\gamma)\beta}{S\beta\varepsilon\gamma}.$$

Es erhält also x aus beiden Gleichungen denselben Wert und das zweite und dritte Perpendikel durchschneiden das erste in demselben Punkte K, dessen Vector

$$AK = \beta - \frac{S\beta(\beta-\gamma)}{S\beta\varepsilon\gamma}\varepsilon\gamma.$$

15. Der Mittelpunkt des einem Dreieck umschriebenen Kreises, der Durchschnittspunkt seiner Mittellinien und der Durchschnittspunkt seiner Höhenperpendikel liegen in einer Geraden; und zwar ist der Abstand der beiden ersten Punkte halb so gross als der Abstand des zweiten vom dritten.

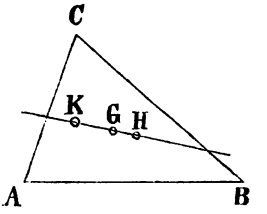
In den Aufgaben 13, 3, 14 haben wir gefunden

$$AH = {}^1/_2\left[\gamma + \varepsilon\gamma \cdot \frac{S(\beta-\gamma)\beta}{S\beta\varepsilon\gamma}\right]$$

$$AG = {}^1/_3(\beta+\gamma)$$

$$AK = \beta - \varepsilon\gamma \cdot \frac{S(\beta-\gamma)\beta}{S\beta\varepsilon\gamma}.$$

Fig. 28.



Der Vector HG ist somit die Differenz von AG und AH und der Vector GK die Differenz von AK und AG, also

$$HG = AG - AH$$

$$= {}^1/_3\beta - {}^1/_6\gamma - {}^1/_2\varepsilon\gamma \frac{S(\beta-\gamma)\beta}{S\beta\varepsilon\gamma}.$$

Ebenso $$GK = AK - AG$$

$$= {}^2/_3\beta - {}^1/_3\gamma - \varepsilon\gamma \frac{S(\beta-\gamma)\beta}{S\beta\varepsilon\gamma}$$

$$= 2\left[{}^1/_3\beta - {}^1/_6\gamma - {}^1/_2\varepsilon\gamma \frac{S(\beta-\gamma)\beta}{S\beta\varepsilon\gamma}\right]$$

daher $$GK = 2HG.$$

Da die beiden Vectoren HG und GK den Punkt G gemeinschaftlich haben und der eine das zweifache des anderen ist, so liegen die Punkte H, G, K in einer Geraden.

16. Den Mittelpunkt eines dem Dreiecke eingeschriebenen Kreises zu finden.

Heissen die Einheitsvectoren längs der Seiten

$$AB, \quad AC, \quad CB$$
$$\gamma, \quad \beta, \quad \alpha$$

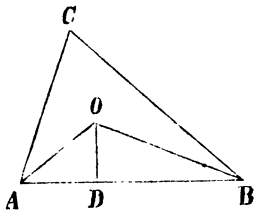
und die Tensoren

$$c, \quad b, \quad a,$$

so sind die Vectoren, welche die Winkel

$$A, \quad B, \quad C \text{ halbiren},$$
$$x(\beta+\gamma), \quad -y(\gamma+\alpha), \quad z(\alpha-\beta)$$

Fig. 29.



Für den Durchschnittspunkt des ersten und zweiten muss

$$x(\beta+\gamma) + y(\gamma+\alpha) = c\gamma$$

Operirt man mit dem Symbol $V(\gamma+\alpha)$, so hat man

$$xV(\gamma+\alpha)(\beta+\gamma) = cV(\gamma+\alpha)\gamma,$$

woraus folgt

$$x = \frac{cV(\alpha\gamma)}{V\gamma\beta + V\alpha\beta + V\alpha\gamma}.$$

Für den Durchschnittspunkt des ersten und dritten, gilt die Gleichung

$$x(\beta+\gamma)-z(\alpha-\beta)=b\beta$$

und nachdem man mit $V(\alpha-\beta)$ operirt hat,

$$x=\frac{bV\alpha\beta}{V\alpha\beta+V\alpha\gamma-V\beta\gamma}.$$

Diese beiden Werthe von x sind gleich, denn die Zähler sind

$$cV\alpha\gamma=c\varepsilon\sin B,\quad bV\alpha\beta=b\varepsilon\sin C$$

was nach Aufg. 12 gleich ist. Ebenso sind die Nenner gleich, indem $-V\beta\gamma=+V\gamma\beta$.

Es wird also die erste den Winkel A halbirende Gerade von den beiden anderen in demselben Puncte getroffen, oder sie schneiden sich in demselben Punkte. Heisst der Durchschnittspunkt O, so ist

$$AO=\frac{cV\alpha\gamma}{V\gamma\beta+V\alpha\beta+V\alpha\gamma}(\beta+\gamma)=\frac{c\sin B}{\sin A+\sin B+\sin C}(\beta+\gamma)$$

Da

$$(\beta+\gamma)^2=\beta^2+2S\beta\gamma+\gamma^2=-2(1+\cos A)=-4\cos^2\frac{A}{2},$$

so ist die absolute Länge

$$AO=\frac{2c\sin B\cos\frac{A}{2}}{\sin A+\sin B+\sin C}.$$

17. In einem vierseitigen Prisma übersteigt die Summe der Quadrate der Kanten die Summe der Quadrate der Diagonalen um das achtfache Quadrat jener Geraden, welche die Durchschnittspunkte von je einem Paar der Diagonalen verbindet.

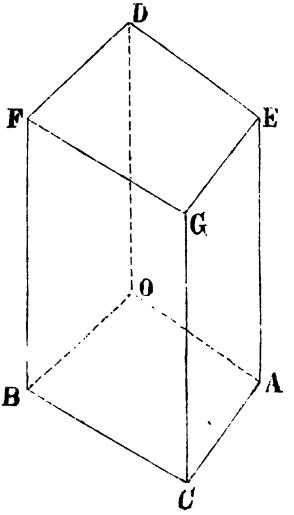
Es sei $OA=\alpha$, $OB=\beta$, $OC=\gamma$, $OD=\delta$; Summe der Quadrate der Kanten =

$$2[\alpha^2+\beta^2+(\gamma-\alpha)^2+(\gamma-\beta)^2+2\delta^2]$$
$$=2[2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2+2\delta^2-2S\alpha\gamma-2S\beta\gamma];$$

Summe der Quadrate der Diagonalen

$$=(\delta+\gamma)^2+(\delta-\gamma)^2+(\delta+\alpha-\beta)^2+(\delta+\beta-\alpha)^2$$
$$=2[\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\delta^2-2S\alpha\beta]$$

Fig. 30.



Nun ist $\quad {}^1/_2 OG = {}^1/_2(\delta + \gamma)$

zugleich der Vector zum Mittelpunkte von CD und daher der Vector zum Durchschnittspunkte der beiden Diagonalen OG, CD.

Der Vector zum Mittelpunkte von AF ist zugleich der Vector des Mittelpunktes von BE, daher der Vector des Durchschnittspunktes der beiden Diagonalen AF, BE

$$= {}^1/_2(\delta + \alpha + \beta),$$

daher ist der Vector, der diese beiden Durchschnittspunkte verbindet. oder der Unterschied der Vectoren dieser Punkte

$$= {}^1/_2(\alpha + \beta - \gamma),$$

sein achtfaches Quadrat

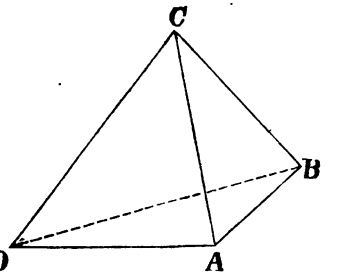
$$= 2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2S\alpha\beta - 2S\alpha\gamma - 2S\beta\gamma);$$

addirt man nun dieses zur Summe der Quadrate der Diagonalen, so erhält man die Summe der Diagonalen der Kanten.

18. Es sei zu finden die Bedingung, dass die von den Ecken eines Tetraeders (einer dreiseitigen Pyramide) auf die gegenüberliegenden Flächen gefällten Perpendikel einander durchschneiden.

Es seien OA, OB, OC die Kanten des Tetraeders α, β, γ die entsprechenden Vectoren.

Fig. 31.



Die von A und B senkrecht auf die gegenüberliegenden Flächen geführten Vectoren können bezüglich bezeichnet werden (als Vielfache von) $V\beta\gamma$, $V\gamma\alpha$ (57). Sollen sich diese Senkrechten in einem Punkte R schneiden, so müssen die drei Punkte A, B, R in einer Ebene liegen; daher

$$S.(\beta-\alpha)V\beta\gamma V\gamma\alpha = S.(\beta-\alpha)\,[S.V\beta\gamma V\gamma\alpha - V.V\beta\gamma V\gamma\alpha]$$

d. h. $\qquad S.(\beta-\alpha)V.V\beta\gamma V\gamma\alpha = 0,$

weil $S(\beta-\alpha) \times S.V\beta\gamma V\gamma\alpha$ als Scalar der Vectors $(\beta-\alpha)$ verschwindet.

Es ist nun $\qquad V.V\beta\gamma V\gamma\alpha = -\gamma S\beta\gamma\alpha,$

wenn man in (87) α, β, γ, δ ersetzt bezüglich durch β, γ, γ, α; daher $\quad S.(\beta-\alpha)V.V\beta\gamma V\gamma\alpha = -S.(\beta-\alpha)\gamma S\beta\gamma\alpha$

$$= -(S\beta\gamma - S\alpha\gamma)\,S\beta\gamma\alpha$$

Es muss daher $\qquad S\beta\gamma = S\alpha\gamma.$

Es ist aber $$BC^2 + OA^2 = (\gamma - \beta)^2 + \alpha^2$$
$$= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2S\beta\gamma,$$
ersetzt man darin $S\beta\gamma$ durch $S\alpha\gamma$, so erhält man
$$BC^2 + OA^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2S\alpha\gamma$$
$$= (\gamma - \alpha)^2 + \beta^2$$
$$= AC^2 + OB^2.$$
Die Bedingung demnach, dass sich alle Perpendikel durchschneiden, ist die, dass die Summe der Quadrate je zweier gegenüberliegenden Kanten eine und dieselbe sei.

Der Satz gilt auch umgekehrt, wenn die Summe der Quadrate von je zwei gegenüberliegenden Kanten constant ist, so schneiden sich die von den Ecken auf die gegenüberliegenden Flächen gefällten Senkrechten in einem Punkte.

19. Die Beziehungen zwischen den Kanten und Kantenwinkeln, und zwischen den Flächen und Flächenwinkeln eines Tetraeders zu finden.

Bezeichnet man die Vectoren (Fig. 31) OA, OB, OA bezüglich mit α, β, γ, so ist
$$CA = \alpha - \gamma; \quad CB = \beta - \gamma.$$
Bildet man nun das Product dieser beiden letzten Vectoren, so hat man
$$CA \,.\, CB = \alpha\beta - \alpha\gamma - \gamma\beta + \gamma^2$$
Diese Gleichung kann sofort in zwei Gleichungen zerfällt werden und zwar
$$S(CA \,.\, CB) = S\alpha\beta - S\alpha\gamma - S\gamma\beta + \gamma^2$$
$$V(CA \,.\, CB) = V\alpha\beta - V\alpha\gamma - V\gamma\beta.$$
Aus der ersten Gleichung folgt, wenn die Tensoren von OA, OB, OC, CA, CB, AB entsprechend mit a, b, c, m, l, n bezeichnet werden:
$$-lm \cos ACB = -ab \cos AOB + ac \cos AOC + bc \cos BOC - c^2.$$
oder durch Transposition
$$c^2 - ac \cos AOC - bc \cos BOC = lm \cos ACB - ab \cos AOB,$$
eine Relation, welche den Zusammenhang zwischen den Kanten und Kantenwinkeln eines Tetraeders ausdrückt.

20. Wenn wir andererseits die Vectorgleichung quadriren, so haben wir
$$[V(CA \,.\, CB)]^2 = (V\alpha\beta - V\alpha\gamma - V\gamma\beta)^2$$
$$= (V\alpha\beta)^2 - V\alpha\beta \,.\, V\alpha\gamma - V\alpha\beta \,.\, V\gamma\beta + (V\alpha\gamma)^2 + V\alpha\gamma \,.\, V\gamma\beta$$
$$- V\alpha\gamma \,.\, V\alpha\beta - V\gamma\beta \,.\, V\alpha\beta + V\gamma\beta \,.\, V\alpha\gamma + (V\gamma\beta)^2.$$

Wenn wir nun beachten, dass die übereinander stehenden Producte sich nur durch die Stellung der Vectorfactoren unterscheiden, dass also die Vectorantheile derselben sich aufheben und nur ihre Scalartheile übrig bleiben, so ist die rechte Seite der Gleichung

$$[V(CA\,.\,CB)]^2 = (V\alpha\beta)^2 + (V\alpha\gamma)^2 + (V\gamma\beta)^2 - 2SV\alpha\beta\,V\alpha\gamma - 2SV\alpha\beta\,V\gamma\beta + 2SV\alpha\gamma\,V\gamma\beta.$$

Setzt man für die einzelnen Glieder die geometrischen Bedeutungen nämlich

$$\begin{aligned}
[V(CA\,.\,CB)]^2 &= -[TV(CA\,.\,CB)]^2 = -(1/2\,\triangle ABC)^2,\\
(V\alpha\beta)^2 &= -(TV\alpha\beta)^2 \qquad\quad = -(1/2\,\triangle AOB)^2,\\
(V\alpha\gamma)^2 &= -(TV\alpha\gamma)^2 \qquad\quad = -(1/2\,\triangle AOC)^2,\\
(V\gamma\beta)^2 &= -(TV\gamma\beta)^2 \qquad\quad = -(1/2\,\triangle BOC)^2,
\end{aligned}$$

und ferner, da $SV\alpha\beta\,V\alpha\gamma = -TV\alpha\beta\,.\,TV\alpha\gamma\cos A$, worin A den Winkel, der auf die Ebene AOB und AOC errichteten Perpendikel oder den Neigungswinkel dieser Ebenen, sowie analog B und C die Neigungswinkel der in den Kanten OB und OC sich schneidenden Ebenen bezeichnen mögen,

$$\begin{aligned}
2SV\alpha\beta\,Vc\gamma &= -2TV\alpha\beta\,.\,TV\alpha\gamma\cos A\\
&= -2\,.\,1/2\triangle AOB\,.\,1/2\triangle AOC\cos A,\\
2SV\alpha\beta\,V\gamma\beta &= -2TV\alpha\beta\,.\,TV\gamma\beta\cos B\\
&= -2\,.\,1/2\triangle AOB\,.\,1/2\triangle BOC\cos B,\\
2SV\alpha\gamma\,V\gamma\beta &= -2TV\alpha\gamma\,.\,TV\gamma\beta\cos(180^0 - C)\\
&= +2\,.\,1/2\triangle AOC\,.\,1/2\triangle BOC\cos C
\end{aligned}$$

und multiplicirt die ganze Gleichung mit -4, so hat man den bekannten Satz

$$(\triangle ABC)^2 = (\triangle AOB)^2 + (\triangle AOC)^2 + (\triangle BOC)^2 - 2\triangle AOB\,.\,\triangle AOC\cos A - 2\triangle AOB\,.\,\triangle BOC\cos B - 2\triangle AOC\,.\,\triangle BOC\cos C,$$

ein Anologon des Cosinussatzes der ebenen Trigonometrie.

Schliessen die Kanten α, β, γ rechte Winkel ein, so sind auch die Neigungswinkel der Ebenen A, B, C rechte Winkel und $\cos A = \cos B = \cos C = 0$; für diesen Fall ist dann dieser Satz

$$(\triangle ABC)^2 = (\triangle AOB)^2 + (\triangle AOC)^2 + (\triangle BOC)^2$$

oder: das Quadrat der Hypotenusenfläche ist gleich der Summe der Quadrate der drei Kathetenflächen.

21. Um den Schwerpunkt des Tetraeders, d. h. seinen Vector zu bestimmen, haben wir zuerst den Schwerpunkt M des Dreieckes AOB und den Schwerpunkt N des Dreieckes ACB anzugeben.

Nun ist nach Beisp. 3

$$OM = \frac{\alpha+\beta}{3}, \text{ und}$$

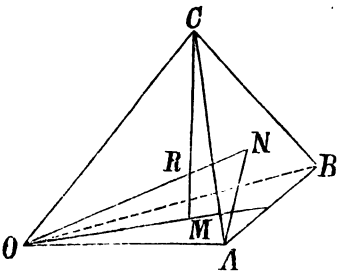
$$AN = \frac{AB+AC}{3} = \frac{\beta+\gamma-2\alpha}{3}$$

daher

$$ON = OA + AN$$

$$= \alpha + \frac{\beta+\gamma-2\alpha}{3} = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}.$$

Fig. 32.



Der Durchschnittspunkt von ON und CM ist der Schwerpunkt des Tetraeders R. Es ist aber

$$OR = OM + xMC \text{ und andererseits } OR = yON,$$

worin x, y noch unbekannte Scalaren bezeichnen, daher

$$\frac{\alpha+\beta}{3} + x\left(\gamma - \frac{\alpha+\beta}{3}\right) = y\,\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$$

oder $$(1-x)\alpha + (1-x)\beta + 3x\gamma = y\alpha + y\beta + y\gamma.$$

Da nun α, β, γ nicht complanar sind, so müssen die Coefficienten von α, β, γ beiderseits gleich sein, also

$$1-x = y, \quad 3x = y$$

woraus sich $y = {}^3/_4$ ergibt. Es ist somit

$$OR = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{4}.$$

Wäre die Lage der Eckpunkte des Tetraeders O, A, B, C durch die Vectoren δ', α', β', γ', die von einem anderen Puncte O' ausgehen, gegeben, so wäre $OR = \varrho - \delta'$, wenn der Vector von R in Bezug auf den neuen Anfangspunkt O' mit ϱ bezeichnet wird, und ebenso

$$\alpha = \alpha' - \delta', \quad \beta = \beta' - \delta', \quad \gamma = \gamma' - \delta',$$

somit $$\varrho - \delta' = \frac{\alpha'+\beta'+\gamma'-3\delta'}{4}$$

oder $$\varrho = \frac{\alpha'+\beta'+\gamma'+\delta'}{4}.$$

22. Zerlegt man noch die in der letzten Gleichung vorkommenden Vectoren nach drei senkrecht aufeinander stehenden Axen, deren Versoren i, j, k sind, so dass

$$\begin{aligned}\varrho &= Xi + Yj + Zk\\ \alpha' &= x_{,}i + y_{,}j + z_{,}k\\ \beta' &= x_{,,}i + y_{,,}j + z_{,,}k\\ \gamma' &= x_{,,,}i + y_{,,,}j + z_{,,,}k\\ \delta' &= x_{,,,,}i + y_{,,,,}j + z_{,,,,}k,\end{aligned}$$

so ist

$$\begin{aligned}X &= {}^1/_4(x_{,} + x_{,,} + x_{,,,} + x_{,,,,})\\ Y &= {}^1/_4(y_{,} + y_{,,} + y_{,,,} + y_{,,,,})\\ Z &= {}^1/_4(z_{,} + z_{,,} + z_{,,,} + z_{,,,,}),\end{aligned}$$

worin X, Y, Z u. s. w. die cartesianischen Coordinaten des Schwerpunktes und der Eckpunkte bedeuten.

23. Es seien A, B, C die Ecken eines sphärischen Dreieckes; die vom Mittelpunkte O der Kugel zu ihnen gezogenen Einheitsvectoren seien α, β, γ.

Somit hat man identisch nach § 46

$$\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\frac{\gamma}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Aus dieser Identität kann die gesammte sphärische Trigonometrie entwickelt werden. Setzt man

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \cos b + \beta_1 \sin b;\quad \frac{\gamma}{\beta} = \cos a + \alpha_1 \sin a;\quad \frac{\alpha}{\beta} = \cos c + \gamma_1 \sin c,$$

worin a, b, c die Seiten des sphärischen Dreieckes und α_1, β_1, γ_1, die im gehörigen Sinne auf die Ebenen AOC, COB und AOB senkreicht errichteten Einheitsvectoren bedeuten, so ist

$$(\cos b + \beta_1 \sin b)\ (\cos a + \alpha_1 \sin a) = \cos c + \gamma_1 \sin c.$$

Nimmt man beiderseits die Scalartheile, so hat man

$$\cos b \cos a + S\beta_1\alpha_1 \,.\, \sin b \sin a = \cos c;$$

ersetzt man hierin $S\beta_1\alpha_1$ durch den negativen Cosinus des Winkels den β_1, α_1 einschliessen, dessen Supplement der Neigungswinkel der Ebenen AOC und BOC oder der sphärische Winkel C ist, so erhält man die Fundamentalformel der sphärischen Trigonometrie

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C.$$

24. Bei derselben Bezeichnung wie im Vorhergehenden ist

$$V\alpha\beta = \gamma_1 \sin c,\quad V\beta\gamma = \alpha_1 \sin a$$

somit

$$V\alpha\beta V\beta\gamma = \gamma_1\alpha_1 \,.\, \sin c \sin a.$$

Nach (87) ist, wenn darin γ, δ bezüglich durch β, γ ersetzt wird,

$$V.V\alpha\beta V\beta\gamma = \alpha S\beta\beta\gamma - \beta S\alpha\beta\gamma = -\beta S\alpha\beta\gamma,$$

da $S\beta\beta\gamma = 0$ ist; nimmt man nun von beiden Seiten der vorletzten Gleichung den Vectorantheil, so hat man

$$V.V\alpha\beta V\beta\gamma = V\gamma_1\alpha_1 \sin c \sin a.$$

Da nun die rechte Seite gleich ist $\beta \sin c \sin a \sin B$, so hat man nach Weglassung des Factors β

$$-S\alpha\beta\gamma = \sin c \sin a \sin B$$

ebenso, oder durch cyklische Vertauschung findet man

$$-S\alpha\beta\gamma = \sin a \sin b . \sin C;$$

somit $\quad \sin c \sin B = \sin b . \sin C$

oder $\quad \sin b : \sin c = \sin B : \sin C$

25. Die Identität $\frac{\alpha}{\gamma} \cdot \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$ lässt sich in eine andere bemerkenswerthe Form bringen.

Da jede der darin enthaltenen Quaternionen ein Versor ist, so kann sie nach (§ 43) dargestellt werden als die Potenz eines Vectors und zwar jenes, der ihre Axe bildet. Errichtet man im Mittelpunkte der Kugel O einen senkrechten Einheitsvector β_1 auf die Ebene COA (und zwar zur linken Hand einer durch OC gelegten gegen OA gekehrten menschlichen Figur), so erhält man auf der Kugel den Punkt B_1, den man den positiven Pol des Bogens CA nennen kann. Ebenso seien A_1 und C_1 die positiven Pole der Seiten BC und AB, und ihre Vectoren α_1 und γ_1. Dann ist der Versor $\frac{\alpha}{\gamma} = \beta_1^{\frac{2b}{\pi}}$ d. h. gleich der Axe β_1 mit einem Exponenten, der in einem solchen Verhältnisse zur Einheit steht, wie der Winkel des Versors zu einem rechten Winkel. Ebenso ist $\frac{\gamma}{\beta} = \alpha_1^{\frac{2a}{\pi}}$.

Die Quaternion $\frac{\alpha}{\beta}$ hat aber nicht γ_1 zur Axe, sondern den γ_1 entgegengesetzten Vector; γ_1 ist die Axe von $\frac{\beta}{\alpha}$, demnach ist $\frac{\beta}{\alpha} = \gamma_1^{\frac{2c}{\pi}}$.

Wenn wir nun die obige Identität mit $\frac{\beta}{\alpha}$ multipliciren, so erhalten wir

$$\frac{\beta}{\alpha}\,\frac{\alpha}{\gamma}\,\frac{\gamma}{\beta} = 1$$

oder

$$\gamma_1^{\frac{2c}{\pi}}\ \beta_1^{\frac{2b}{\pi}}\ \alpha_1^{\frac{2a}{\pi}} = 1.$$

Legen wir nun durch jene drei Puncte A_1, B_1, C_1 ein sphärisches Dreieck, so wird es das Polardreieck zum ursprünglichen sein, und seine Winkel sind mit den Seiten des letzteren supplementär, so dass

$$c = \pi - C_1, \quad b = \pi - B_1, \quad a = \pi - A_1.$$

Demnach haben wir

$$\gamma_1^{\frac{2(\pi-C_1)}{\pi}}\ \beta_1^{\frac{2(\pi-B_1)}{\pi}}\ \alpha_1^{\frac{2(\pi-A_1)}{\pi}} = 1;$$

diese Gleichung gilt nun für jedes beliebige sphärische Dreieck, so dass wir die Striche in den Bezeichnungen weglassen können. Wenn man noch beachtet, dass

$\gamma^2 = \beta^2 = \alpha^2 = -1$ ist, so erhält man

$$\gamma^{-\frac{2C}{\pi}}\ \beta^{-\frac{2B}{\pi}}\ \alpha^{-\frac{2A}{\pi}} = -1.$$

Diese Gleichung, in welcher α, β, γ die Einheitsvectoren OA, OB, OC irgend welcher drei Puncte auf der Oberfläche der mit dem Radius 1 beschriebenen Regel bedeuten, während die drei Scalaren A, B, C in den Exponenten der drei Factoren im Allgemeinen die Beträge der Drehung um diese drei Radien α, β, γ und zwar von der Ebene AOC zu der Ebene AOB, von der Ebene BOA zu der Ebene BOC und von der Ebene COB zu COA, bezeichnen und negativ oder positiv sind, je nachdem diese Drehungen der Ebenen selbst als positiv oder negativ angesehen werden, ist eine wichtige in der Anwendung der Quaternionen. Sie schliesst z. B. die ganze Lehre von den sphärischen Dreiecken ein.*)

*) Sieht man die obigen Drehungen wie es mitunter geschieht als positiv an, so sind die Exponenten mit entgegengesetztem Zeichen zu nehmen, oder

$$\gamma^{\frac{2C}{\pi}}\ \beta^{\frac{2B}{\pi}}\ \alpha^{\frac{2A}{\pi}} = -1.$$

Multiplicirt man nach einander die Gleichung mit

$$\gamma^{\frac{2C}{\pi}}, \beta^{\frac{2B}{\pi}}, \alpha^{\frac{2A}{\pi}}$$

so erhält man

$$\alpha^{\frac{2A}{\pi}} \beta^{\frac{2B}{\pi}} \gamma^{\frac{2C}{\pi}} = -1. \quad \ldots\ldots \quad (101)$$

Andererseits kann man dieselbe Gleichung darstellen

$$\gamma^{-\frac{2C}{\pi}} \beta^{-\frac{2B}{\pi}} \alpha^{\frac{2(\pi-A)}{\pi}} = 1.$$

Durch Aufeinanderfolgende Multiplicatton mit

$$\gamma^{\frac{2C}{\pi}} \text{ und } \beta^{\frac{2B}{\pi}} \qquad \text{erhält man}$$

$$\alpha^{\frac{2(\pi-A)}{\pi}} = \beta^{\frac{2B}{\pi}} \gamma^{\frac{2C}{\pi}} \quad \ldots\ldots \quad (102)$$

Diese Gleichung besagt, dass die positive Drehung von (A gegen B) um C im Betrage des sphärischen Winkels C mehr der positiven Drehung um B (von C gegen A) im Betrage des sphärischen Winkels B aequivalent ist der positiven Drehung um A (von der Verlängerung von CA gegen B) im Betrage des sphärischen Aussenwinkels an A. Bezeichnen wir die Aufeinanderfolge dieser beiden Drehungen um die Axen OC und OB als die sphärische Summe der beiden sphärischen Winkel C und B, so kann auch gesagt werden, dass der Aussenwinkel eines sphärischen Dreieckes gleich sei der sphärischen Summe seiner beiden entgegengesetzten inneren Winkel, in der angegebenen Ordnung genommen. Da nun dieser Winkel mehr seinem benachbarten inneren Winkel π ausmacht, so kann man in diesem Sinne sagen, dass die sphäri-Summe der Winkel in einem sphärischen Dreiecke gleich sei π, was auch aus der anderen Form der Gleichung (101) hervorgeht.

26. Geht das Dreieck in ein ebenes über, so sind die Axen dieser drei Winkel parallel und somit gleich. Man hat dann

$$\alpha = \beta = \gamma \text{ und } -1 = \gamma^{\frac{2\pi}{\pi}}.$$

Die Gleichung (101) wird

$$\gamma^{\frac{2A}{\pi}} \gamma^{\frac{2B}{\pi}} \gamma^{\frac{2C}{\pi}} = \gamma^{\frac{2\pi}{\pi}}$$

somit ist

$$A + B + C = \pi$$

27. Wenn man die Gleichung (102) des vorigen §

$$\alpha^{\frac{2(\pi-A)}{\pi}} = \beta^{\frac{2B}{\pi}} \gamma^{\frac{2C}{\pi}}$$

in Quaternionen aufschreibt

$$\cos(\pi-A) + \alpha \sin(\pi-A) = (\cos B + \beta \sin B)(\cos C + \gamma \sin C)$$

und die Scalartheile beiderseits nimmt, so hat man

$$-\cos A = \cos B \cos C + S\beta\gamma \sin B \sin C.$$

Ersetzt man noch $S\beta\gamma$ durch $-\cos a$, so erhält man eine andere Form der Fundamentalgleichung der sphärischen Trigonometrie

$$\cos A + \cos B \cos C = \sin B \sin C \cos a.$$

28. Nimmt man dagegen die Vectortheile, so hat man

$$\alpha \sin A = \gamma \cos B \sin C + \beta \cos C \sin B + V\beta\gamma \sin B \sin C.$$

Diese Gleichung verknüpft die Winkel oder die Drehungen A, B, C mit den Richtungen der Radien OA, OB, OC für irgend ein System dreier von einem gemeinsamen Punkt ausgehenden Geraden. Vertauscht man cyklisch in derselben α, β, γ und A, B, C, so erhält man noch die beiden anderen

$$\beta \sin B = \alpha \cos C \sin A + \gamma \cos A \sin C + V\gamma\alpha \sin C \sin A$$

$$\gamma \sin C = \beta \cos A \sin B + \alpha \cos B \sin A + V\alpha\beta \sin B \sin A.$$

Die geometrische Deutung einer dieser Gleichungen etwa der letzten lässt sich in folgendem Theorem aussprechen:

Wenn auf der Oberfläche einer Kugel (Halbmesser 1) ein sphärisches Dreieck ABC verzeichnet ist, und man zieht vom Mittelpunkte derselben drei Gerade, eine gegen den Punkt A von der Länge $\sin A \cos B$, die andere gegen B von der Länge $\sin B \cos A$ und die dritte senkrecht auf die Ebene AOB nach jener Seite wo C liegt, von der Länge $\sin A \sin B$, so ist die dazwischenliegende Diagonale des aus diesen drei Geraden als Kanten construirten Parallelepipeds gerichtet gegen C und hat die Länge von $\sin C$.

29. Dividirt man die beiden Theile der letzten Gleichung durch ϱ, welches einen vom Mittelpunkte der Kugel zu einem vierten Punkte der Oberfläche P gezogenen Vector bedeutet, und nimmt man beiderseits die Scalartheile, so findet man, wenn Q den Fusspunkt des von P auf AB gefällten Bogenperpendikels bezeichnet, (dieses Bogenperpendikel angesehen als positiv, wenn

der Punkt P mit C auf einer Seite des durch A und B gehenden grössten Kreises gelegen ist):

$$\sin C \cos PC = \cos A \sin B \cos PB + \cos B \sin A \cos PA + \sin B \sin A \sin c \sin PQ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (103)$$

indem

$$S\frac{\gamma}{\varrho} = \cos PC, \quad S\frac{\beta}{\varrho} = \cos PB, \quad V\alpha\beta = \gamma_1 \sin c$$

$$S\frac{V\alpha\beta}{\varrho} = \sin c \; S\frac{\gamma_1}{\varrho} = \sin c \cos PC_1 = \sin c \sin PQ$$

gleichgesetzt werden können (worin C_1 den positiven Pol von AB und γ_1 seinen Vector bedeutet und ferner $PC_1 + PQ = \frac{\pi}{2}$).

Von dieser Gleichung (103) können viele minder allgemeine Formeln abgeleitet werden, wenn man die Lage des Punktes specialisirt.

Wählt man den Punct P z. B. so, dass er der Mittelpunkt des um das Dreieck ABC umschriebenen Kreises ist, und bezeichnet man mit R den Bogenradius des letzteren, und durch S die halbe Summe der drei Winkel des Dreieckes, so dass,

$$2S = A + B + C = \pi + \sigma$$

ist, wenn mit σ der sphärische Excess bezeichnet wird, so ist

$$PC = PB = PA = R$$

und die Gleichung wird

$$[\sin C - \sin A \cos B - \sin B \cos A] \cos R = \sin A \sin B \sin c \sin PQ.$$

Der eingeklammerte Factor auf der linken Seite ist aber

$$-[\sin(A+B) - \sin C] = -\cos\frac{\pi+\sigma}{2} \sin(S-C)$$

$$= \sin\frac{\sigma}{2} \sin(S-C)$$

Andererseits ist

$$\sin PQ = \sin PA \sin PAB,$$

da man aber leicht findet, dass $PAB = \frac{A+B-C}{2} = S-C$, so so ist $\sin PQ = \sin R \sin(S-C)$.

Setzt man diese Werthe ein, so hat man nach Weglassung des gemeinsamen Factors

$$\sin\frac{\sigma}{2} \cos R = \sin A \sin B \sin c \sin R$$

oder $$\operatorname{cotg} R = \frac{\sin A \sin B \sin c}{\sin \frac{\sigma}{2}}.$$

30. Um die Drehung eines starren Körpers um eine gegebene Axe durch einen gegebenen Winkel von endlicher Grösse darzustellen,

sei α ein Einheitsvector der Axe, ϱ der Vector irgend eines Punktes in dem Körper in Bezug auf einen bestimmten Punkt der Axe und ϑ der Drehungswinkel.

Dann ist

$$\begin{aligned}\varrho &= \alpha^{-1}(\alpha\varrho) = \alpha^{-1}(S\alpha\varrho + V\alpha\varrho)\\ &= -\alpha S\alpha\varrho - \alpha V\alpha\varrho.\end{aligned}$$

Der erste Theil bleibt im Verlaufe der Drehung durchaus ungeändert, es ändert sich nur der zweite Theil, der einen Vector bedeutet, welcher auf der Umdrehungsaxe α senkrecht steht; er wird durch diese Drehung zu

$$-\alpha^{\frac{2\vartheta}{\pi}}\ \alpha V\alpha\varrho$$

oder, wenn man nach (§ 32) $\alpha^{\frac{2\vartheta}{\pi}}$ durch $\cos\vartheta + \alpha\sin\vartheta$ ersetzt, zu

$$-\alpha V\alpha\varrho\cos\vartheta + V\alpha\varrho\sin\vartheta.$$

Daher geht ϱ über in

$$\varrho_1 = -\alpha S\alpha\varrho - \alpha V\alpha\varrho\cos\vartheta + V\alpha\varrho\sin\vartheta,$$

was man auch schreiben kann

$$\begin{aligned}\varrho_1 = &-\alpha S\alpha\varrho\left(\cos^2\frac{\vartheta}{2} + \sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)\\ &-\alpha V\alpha\varrho\left(\cos^2\frac{\vartheta}{2} - \sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)\\ &+2V\alpha\varrho\left(\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\right).\end{aligned}$$

Die zwei ersten Glieder lassen sich ordnen

$$-\alpha\cos^2\frac{\vartheta}{2}(S\alpha\varrho + V\alpha\varrho) - \alpha\sin^2\frac{\vartheta}{2}(S\varrho\alpha + V\varrho\alpha)$$

da $S\alpha\varrho = S\varrho\alpha$ und $-V\alpha\varrho = V\varrho\alpha$ ist;

das dritte Glied aber ist

$$(\alpha\varrho - \varrho\alpha)\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2};$$

daher hat man

$$\begin{aligned}\varrho_1 &= -\alpha\alpha\varrho\cos^2\frac{\vartheta}{2} - \alpha\varrho\alpha\sin^2\frac{\vartheta}{2} + (\alpha\varrho - \varrho\alpha)\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\\ &= \varrho\cos^2\frac{\vartheta}{2} + \alpha\varrho\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\\ &\quad - \varrho\alpha\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\\ &\quad - \alpha\varrho\alpha\sin^2\frac{\vartheta}{2},\end{aligned}$$

was man auch kürzer schreiben kann

$$\begin{aligned}\varrho_1 &= \left(\cos\frac{\vartheta}{2} + \alpha\sin\frac{\vartheta}{2}\right)\varrho\left(\cos\frac{\vartheta}{2} - \alpha\sin\frac{\vartheta}{2}\right)\\ &= \alpha^{\frac{\vartheta}{\pi}}\varrho\,\alpha^{-\frac{\vartheta}{\pi}}. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (103)\end{aligned}$$

31. Nachdem die Drehung um die Axe α durch den Winkel ϑ stattgefunden hat und der Vector ϱ zu ϱ_1 geworden ist, möge eine neue Drehung um die Axe β im Betrage des Winkels φ vorgenommen werden, so wird ϱ_1 übergehen in

$$\varrho_2 = \beta^{\frac{\varphi}{\pi}}\varrho_1\,\beta^{-\frac{\varphi}{\pi}}$$

oder wenn man an die Stelle von ϱ_1 seinen früheren Werth setzt,

$$\varrho_2 = \beta^{\frac{\varphi}{\pi}}\alpha^{\frac{\vartheta}{\pi}}\varrho\,\alpha^{-\frac{\vartheta}{\pi}}\beta^{-\frac{\varphi}{\pi}}.$$

Wäre zuerst die Rotation um β, dann erst die um α vorgenommen worden, so wäre

$$\varrho_2' = \alpha^{\frac{\vartheta}{\pi}}\beta^{\frac{\varphi}{\pi}}\varrho\,\beta^{-\frac{\varphi}{\pi}}\alpha^{-\frac{\vartheta}{\pi}};$$

da nun die Multiplication von Quaternionen nicht commutativ ist, so ist im Allgemeinen nicht

$$\varrho_2' = \varrho_2.$$

Auf diese Art können auch mehrere aufeinanderfolgende Drehungen um verschiedene Axen zu einer einzigen Drehung um eine bestimmte Axe zusammengesetzt werden.

32. Sind die Drehungswinkel unendlich klein, so dass $\cos\vartheta = 1$ und $\sin\vartheta = \vartheta$ gesetzt werden kann, so geht die Formel des vorigen §

$$\varrho_1 = -\alpha S\alpha\varrho - \alpha V\alpha\varrho\cos\vartheta + V\alpha\varrho\sin\vartheta$$

über in

$$\varrho_1 = \varrho + \vartheta V\alpha\varrho \quad \ldots\ldots \quad (104)$$

und

$$\begin{aligned}\varrho_2 &= \varrho_1 + \varphi V\beta\varrho, \\ &= \varrho + \vartheta V\alpha\varrho + \varphi V.\beta(\varrho + \vartheta V\alpha\varrho) \\ &= \varrho + \vartheta V\alpha\varrho + \varphi V\beta\varrho,\end{aligned}$$

da das Glied $\varphi\vartheta V.\beta V\alpha\varrho$ als ein Product zweier unendlich kleiner Grössen weggelassen werden kann. Man kann auch schreiben, da ϑ und φ Scalaren sind,

$$\begin{aligned}\varrho_2 &= \varrho + V(\vartheta\alpha + \varphi\beta)\varrho \\ &= \varrho + T(\vartheta\alpha + \varphi\beta)V.\,U(\vartheta\alpha + \varphi\beta)\varrho.\end{aligned}$$

Diess bedeutet aber, dass ϱ durch den Winkel $T(\vartheta\alpha + \varphi\beta)$ um die Axe $U(\vartheta\alpha + \varphi\beta)$ gedreht worden ist. Nun ist der letztere Ausdruck die Richtung und der erstere die Länge der Diagonale eines Parallelogramms, dessen Seiten $\vartheta\alpha$ und $\varphi\beta$ sind. Setzen wir nun statt $\vartheta\alpha$ und $\varphi\beta$ kurz α und β, wobei wir bemerken, dass α und β nun nicht mehr Einheitsvectoren, sondern Vectoren bedeuten, durch deren Versoren die Axen und durch deren Tensoren die (unendlich kleinen) Drehungswinkel dargestellt werden, so ist dann

$$\begin{aligned}\varrho_1 &= \varrho + V\alpha\varrho \\ \varrho_2 &= \varrho + V\alpha\varrho + V\beta\varrho\end{aligned}$$

oder

$$\varrho_2 = \varrho + V(\alpha+\beta)\varrho.^*) \quad \ldots \quad (105)$$

33. Die Bedingungen für das Gleichgewicht eines starren Körpers durch Quaternionen auszudrücken.

Es seien die wirkenden Kräfte als Vectoren

$$\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3\ \ldots,$$

welche in den Puncten angreifen

$$A_1,\ A_2,\ A_3\ \ldots,$$

deren Vectoren von einem beliebigen Ursprung seien

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\ \ldots.$$

---

*) Die im Vorhergehenden vorgeführten Beispiele und Anwendungen zeigen, wie mannigfaltig und vielseitig die Verwendung des Rechnens mit Vectoren auf Probleme der Planimetrie und Stereometrie, der ebenen und sphärischen Trigonometrie ist. Die Quaternionen liefern aber auch eine allgemeine Methode zur Untersuchung der Raumgebilde, die durchaus analog ist der Methode der sogenannten analytischen Geometrie, welche von Des Cartes begründet worden ist. Die Darstellung dieser Methode, mag (falls dieses Schriftchen einigen Anklang findet) einem folgenden Hefte überlassen werden.

Denken wir uns, dem System werde eine beliebige, kleine Verschiebung ertheilt, so dass nun die Vectoren werden,

$$\alpha_1 + \omega_1,\ \alpha_2 + \omega_2,\ \alpha_3 + \omega_3 \ldots;$$

sei ferner der Winkel zwischen ω_1 und α_1 gleich φ; so ist das Product aus Kraft (Grösse derselben) und der im Sinne der Kraft gemessenen Verschiebung $T\omega_1 . \cos\varphi$

$$T\beta_1 \times T\omega_1 \cos\varphi = -S\beta_1\omega_1.$$

Im Zustande des Gleichgewichts muss nun nach dem Princip der virtuellen Bewegung die Summe dieser Producte für alle Kräfte gleich sein Null. Oder wenn wir diese Summe bezeichnen mit Σ, so haben wir

$$\Sigma S\beta\omega = 0,$$

was auch, da das Scalarnehmen eine distributive Operation ist, geschrieben werden kann

$$S\Sigma\beta\omega = 0.$$

Für eine einfache Verschiebung ohne Drehung ist

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \ldots \quad \text{constant},$$

daher kann ω vor das Summenzeichen gesetzt werden. Oder

$$S . \omega\Sigma\beta = 0.$$

Da nun ω nicht Null ist, so muss der andere Factor verschwinden, daher

$$\Sigma\beta = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (I)$$

Wird aber das ganze System um eine beliebige Axe ε um den sehr kleinen Winkel ϑ gedreht, so übergeht nach (104) α_1 in

$$\alpha_1 + \omega_1 = \alpha_1 + \vartheta V\varepsilon\alpha_1.$$

In dieser Formel bedeutet ε den Einheitsvector längs der Axe; den Scalarfactor ϑ können wir unter das Vectorzeichen setzen und mit ε vereinigen, so dass wenn wir nun anstatt $\vartheta\varepsilon$ kurz ε schreiben nun ε einen sehr kurzen Vector bedeutet; wir haben nun

$$\omega_1 = V\varepsilon\alpha_1 \text{ und } T\beta_1 \times TV\varepsilon\alpha_1 \cos\varphi = -S . \beta_1 V\varepsilon\alpha_1$$

Nun ist aber nach § 52 $S . \beta_1 V\varepsilon\alpha_1 = S . \varepsilon V\alpha_1\beta_1$.

Es muss nun ebenfalls

$$\Sigma S\varepsilon V\alpha\beta = S . \varepsilon\Sigma V\alpha\beta = 0.$$

Da nun ε nicht Null ist, so erhalten wir als zweite Bedingung des Gleichgewichts

$$\Sigma V\alpha\beta = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (II)$$

Jede von den Gleichungen (I) und (II) vertritt drei Scalargleichungen;

die Gleichung (I) sagt aus, dass wenn man alle Kräfte parallel zu sich selbst in einen Punkt versetzt, ihre statische Resultirende (oder Vectorsumme) gleich sei Null, oder dass keine fortschreitende Bewegung möglich sei;

die andere (II) drückt aus, dass das aus allen Kräften resultirende Kräftepaar gleich sei Null, oder, dass keine Drehung ermöglicht werde.*)

34. Um eine einfache Anwendung von der letzten Aufg. zu geben, wollen wir den geometrischen Nachweis liefern, dass ein Tetraeder, welches in eine Flüssigkeit eingetaucht ist, in der überall ein und derselbe Druck herrscht, sich im Gleichgewicht befindet.

Es seien dieselben Bezeichnungen wie in (Aufg. 20) ausserdem sei der auf die Flächeneinheit ausgeübte Druck $2A$. Der Druck der auf die Flächen ausgeübt wird, ist bezüglich

$$AOB \ldots A \,.\, ab \sin (AOB).$$

(Will man ihn als Vector angeben, so muss das voranstehende noch mit dem Einheitsvector in der Richtung senkrecht auf die Ebene AOB und nach innen gerichtet multiplicirt werden; somit)

$$AOB \ldots A \,.\, ab \sin AOB \,.\, \varepsilon = AV\alpha\beta$$
$$AOC \ldots A \,.\, V\gamma\alpha = -AV\alpha\gamma$$
$$BOC \ldots A \,.\, V\beta\gamma = -AV\gamma\beta$$
$$ACB \ldots -A \,.\, V(CA \,.\, CB).$$

Die Summe dieser Kräfte ist

$$A[(V\alpha\beta - V\alpha\gamma - V\gamma\beta) - V(CA \,.\, CB)] = 0$$

nach (Beisp. 19). Es ist also die erste Bedingungsgleichung erfüllt.

Die Angriffspunkte dieser Druckkräfte sind die Schwerpunkte der gedrückten Flächen somit ihre Vectoren bezüglich

$$\tfrac{1}{3}(\alpha+\beta), \quad \tfrac{1}{3}(\alpha+\gamma), \quad \tfrac{1}{3}(\beta+\gamma), \quad \tfrac{1}{3}(\alpha+\beta+\gamma).$$

Man hat nun die Producte aus den Vectoren der Angriffspunkte und der Kräfte zu bilden und ihre Vectorantheile in eine Summe zu vereinigen; man findet

---

*) $V\alpha\beta = \varepsilon\, ab \sin\varphi = \varepsilon \,.\, (a \sin\varphi) b$, der letzte Factor bedeutet die absolute Grösse der Kraft, $a \sin\varphi$ die vom Ursprung auf die Richtung der Kraft gefällte Senkrechte, somit das Product beider das Moment der Kraft und ε die Axe der Drehung, welche diese Kraft zu erzeugen bestrebt ist.

$$\frac{A}{3} V.[(\alpha+\beta)\, V\alpha\beta+(\alpha+\gamma)\, V\gamma\alpha+(\beta+\gamma)\, V\beta\gamma]$$
$$-(\alpha+\beta+\gamma)\,(V\alpha\beta+V\gamma\alpha+V\beta\gamma]$$
$$=\frac{A}{3} V.[\gamma V\beta\alpha+\beta V\alpha\gamma+\alpha V\gamma\beta]=0;$$

denn nach Formel (85) ist

$$V.\gamma V\beta\alpha = \alpha S\beta\gamma - \beta S\gamma\alpha$$
$$V.\beta V\alpha\gamma = \gamma S\alpha\beta - \alpha S\beta\gamma$$
$$V.\alpha V\gamma\beta = \beta S\gamma\alpha - \gamma S\alpha\beta,$$

also der eingeklammerte Factor gleich Null.

Es ist daher auch die zweite Bedingungsgleichung erfüllt.

Halle, Druck von E. Karras.